Συνδυαστική Απαρίθμηση

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συνδυαστική Απαρίθμηση

- Υπολογισμός (με συνδυαστικά επιχειρήματα) του πλήθους των διαφορετικών αποτελεσμάτων ενός «πειράματος».
  - «Πείραμα»: διαδικασία με συγκεκριμένο (πεπερασμένο) σύνολο παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων.
    - Π.χ. ρίψη ζαριών, μοίρασμα τράπουλας, ανάθεση γραφείων, επιλογή password, 6άδες Lotto, …
  - Πληθάριθμος δυναμοσυνόλου: αν $|A| = n$, τότε $|P(A)| = 2^n$
- Βασικές αρχές και έννοιες:
  - Κανόνες γινομένου και αθροίσματος, αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού.
  - Διατάξεις και μεταθέσεις (με ή χωρίς) επανάληψη.
  - Συνδυασμοί (με ή χωρίς) επανάληψη.

Κανόνας Γινομένου

- Πείραμα A με n αποτελέσματα. Πείραμα B με m αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα A και B είναι **ανεξάρτητα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων A **και** B έχει n×m αποτελέσματα.
  - Ανεξάρτητα: το αποτέλεσμα του A δεν επηρεάζει (ως προς τον αριθμό των αποτελεσμάτων) το αποτέλεσμα του B, και αντίστροφα.
    - Π.χ. |A×B| = |A|×|B|
  - Επιλογή ενός ψηφίου 0-9 και ενός κεφαλαίου Ελληνικού γράμματος:
    - 10×24 = 240 διαφορετικά αποτελέσματα.
  - #συμβ/ρών (με κεφαλαία Ελληνικά) μήκους 10: 24^{10}
  - #παλινδρομικών συμβ/ρών μήκους 10: 24^5
  - #συναρτήσεων από A στο B (|A| = n, |B| = m): m^n
  - #συναρτήσεων **1-1** από A στο B (m ≥ n): $m(m-1)\cdots(m-n+1)$

Κανόνας Αθροίσματος

- Πείραμα A με n αποτελέσματα. Πείραμα B με m αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα A και B είναι **αμοιβαία αποκλειόμενα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων A **ή** B έχει n+m αποτελέσματα.
  - Αμοιβαία αποκλειόμενα: η παρατήρηση αποτελέσματος του A αποκλείει την παρατήρηση αποτελέσματος του B, και αντίστροφα.
  - $|A \cup B| = |A| + |B|$, αν $|A \cap B| = \emptyset$
  - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά, και 10 Γερμανικά βιβλία.
  - Τρόποι να διαλέξουμε 2 βιβλία σε διαφορετική γλώσσα:
    - Ελλ. – Αγγλ.: $5 \times 7 = 35$
    - Ελλ. – Γερμ.: $5 \times 10 = 50$
    - Αγγλ. – Γερμ.: $7 \times 10 = 70$
  - Αμοιβαία αποκλειόμενα. Σύνολο: 155 διαφορετικές επιλογές.
  - Τρόποι να διαλέξουμε 2 βιβλία: $\frac{22 \times 21}{2} = 231$

Παραδείγματα

- #passwords με 6 – 8 χαρακτήρες αποτελούμενα από κεφαλαία (Αγγλικά) γράμματα και (τουλάχιστον ένα) δεκαδικό ψηφίο.
  - #passwords μήκους k = $36^k - 26^k$
  - #passwords = $(36^6+36^7+36^8) - (26^6+26^7+26^8)$
- #passwords μήκους 2 από A, B, C, D και 0, 1, 2 με τουλάχιστον ένα ψηφίο.
  - Σωστό το $7^2 - 4^2 = 33$. **Λάθος** το (γιατί;) $2\times3\times7 = 42$!
- #δυαδικών συμβ/ρών μήκους 8 που είτε αρχίζουν από 1 είτε τελειώνουν σε 00:
  - Όχι αμοιβαία αποκλειόμενα: $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$.

Διατάξεις – Μεταθέσεις

- **Διατάξεις** P(n, k): k από n διακεκριμένα αντικείμενα σε k διακεκριμένες θέσεις (1 αντικείμενο σε κάθε θέση).
  - P(n, k) = #τρόπων να πληρωθούν k διακεκριμένες θέσεις από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).
    $$P(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
  - #τρόπων να πληρώσουμε 4 (διαφορετικές) θέσεις εργασίας αν έχουμε 30 υποψήφιους: $P(30,4) = 30!/26!$
  - #συμβ/ρών μήκους 10 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες: $P(24,10) = 24!/14!$
- **Μεταθέσεις** n αντικειμένων: P(n, n) = n!
  - #αναθέσεων 10 (διαφορετικών) γραφείων σε 10 καθηγητές: $P(10,10) = 10!$
  - #συμβ/ρών μήκους 24 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες: $P(24,24) = 24!$

Παραδείγματα

- #συμβ/ρών από 4 διαφορετικούς χαρακτήρες ακολουθούμενους από 3 διαφορετικά ψηφία:
  - $P(24, 4) \times P(10, 3)$
- #τετραψήφιων δεκαδικών αριθμών που δεν αρχίζουν από 0 και δεν έχουν επαναλάμβανόμενα ψηφία:
  - $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$.
- #μεταθέσεων (κεφαλαίων Ελληνικών) όπου Α εμφανίζεται πριν από τα Β και Γ:
  - $P(24, 21) \times 2!$
- #μεταθέσεων όπου Α εμφανίζεται πριν το Β, και μετά από τα Γ και Δ:
  - $P(24, 20) \times 2!$