

Πεπερασμένα Αυτόματα

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

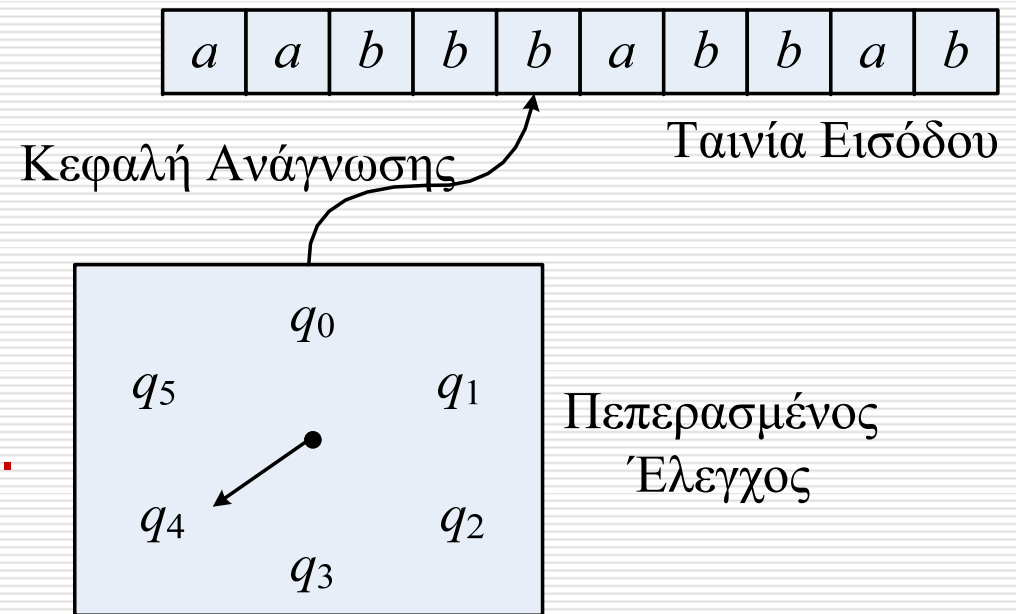
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



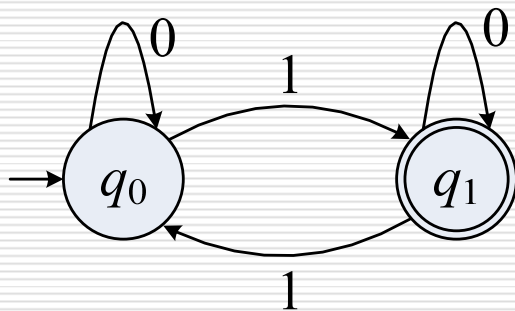
Πεπερασμένα Αυτόματα

- ... είναι απλούστερες υπολογιστικές μηχανές.
 - «Κεντρική Μονάδα» με πεπερασμένο #καταστάσεων.
'Όχι άλλη μνήμη.
 - Είσοδος σειριακά από ταινία μέσω κεφαλής ανάγνωσης.
 - Νέο σύμβολο εισόδου εξετάζεται μία φορά, και προκαλεί αλλαγή κατάστασης.
 - 'Όχι έξοδος εκτός από χαρακτηρισμό τελευταίας κατάστασης ως κατάσταση αποδοχής.



Ορισμός

- Ένα **ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο** (DFA) είναι μια πεντάδα $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ όπου:
- Q ένα πεπερασμένο σύνολο **καταστάσεων**.
 - Σ ένα **αλφάβητο** (εισόδου).
 - $s \in Q$ η **αρχική κατάσταση**.
 - $F \subseteq Q$ το σύνολο **καταστάσεων αποδοχής**.
 - $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$ η **συνάρτηση μετάβασης**.



$$Q = \{q_0, q_1\},$$

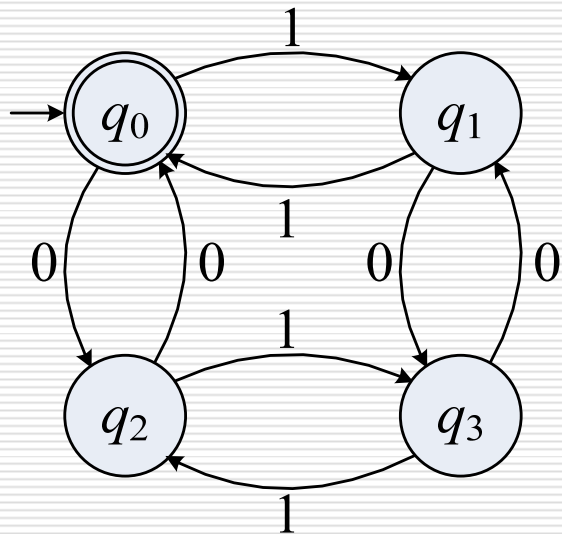
$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$s = q_0,$$

$$F = \{q_1\}$$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_1
q_1	1	q_0

Παράδειγμα



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

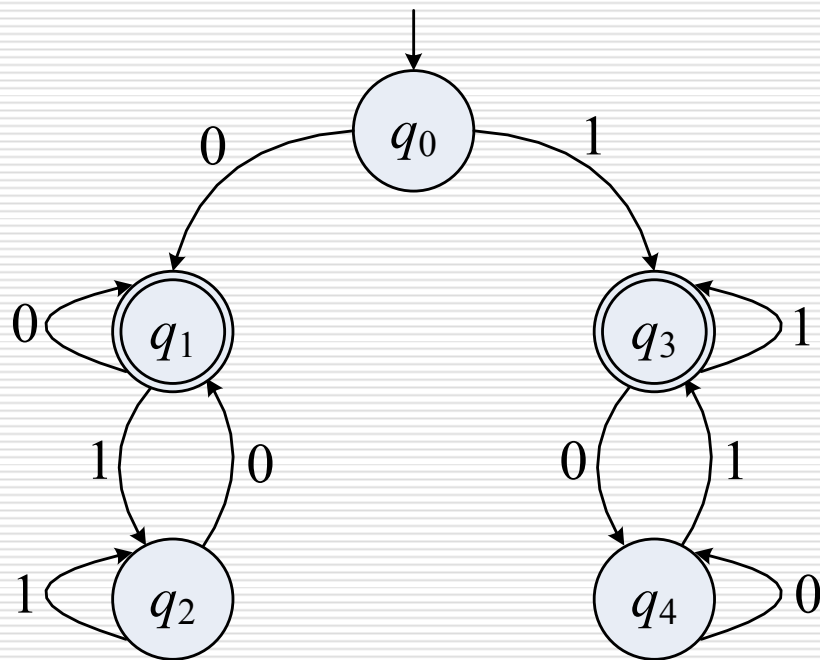
$$s = q_0,$$

$$F = \{q_0\}$$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	0	q_2
q_0	1	q_1
q_1	0	q_3
q_1	1	q_0
q_2	0	q_0
q_2	1	q_3
q_3	0	q_1
q_3	1	q_2

- Αποδέχεται συμβολοσειρές με ζυγό αριθμό 0 και 1.
- Αν αλλάξουμε τελικές καταστάσεις;

Παράδειγμα



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$s = q_0,$$

$$F = \{q_1, q_3\}$$

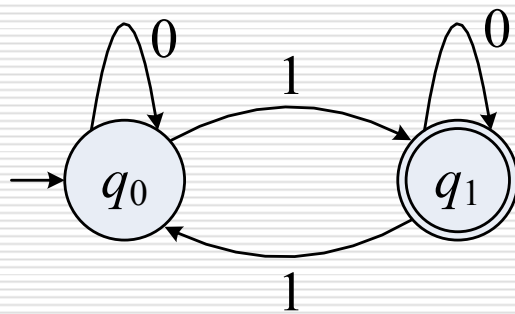
q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	0	q_1
q_0	1	q_3
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2
q_3	0	q_4
q_3	1	q_3
q_4	0	q_4
q_4	1	q_3

- Αποδέχεται δυαδικές συμβολοσειρές που **αρχίζουν και τελειώνουν με το ίδιο σύμβολο.**

Υπολογισμός DFA

- DFA $M(Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **αποδέχεται** συμβ/ρά w αν ξεκινώντας από **αρχική κατάσταση** s , αφού επεξεργαστεί το w , καταλήγει σε **κατάσταση αποδοχής**.
- **Συνολική κατάσταση** (configuration) $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$
 - q τρέχουσα κατάσταση.
 - w είσοδος που δεν έχει επεξεργασθεί ακόμη.
- Συνάρτηση **παράγει άμεσα** $\vdash_M: Q \times \Sigma^+ \mapsto Q \times \Sigma^*$
 - $(q, w) \vdash_M (q', w')$ αν και μόνο αν
 - $w = \sigma w'$ για κάποιο $\sigma \in \Sigma$
 - $\delta(q, \sigma) = q'$

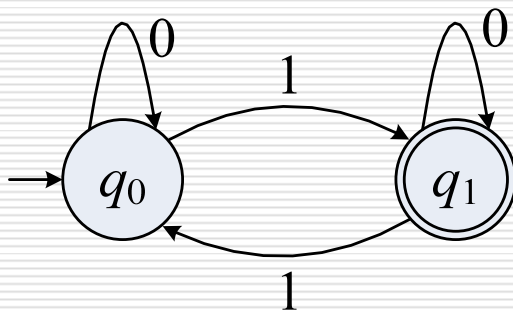
Παράδειγμα



$(q_0, 011010) \vdash_M (q_0, 11010)$
 $\vdash_M (q_1, 1010)$
 $\vdash_M (q_0, 010)$
 $\vdash_M (q_0, 10)$
 $\vdash_M (q_1, 0)$
 $\vdash_M (q_1, \varepsilon)$

Υπολογισμός DFA

- Σχέση **παράγει** $\vdash_M^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$
 - $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ αν και μόνο αν υπάρχουν $n \geq 0$, $q_1, q_2, \dots, q_{n-1} \in Q$ και $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \Sigma$ τέτοια ώστε:
 - $w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w'$ και
 - $\delta(q, \sigma_1) = q_1, \delta(q_1, \sigma_2) = q_2, \dots, \delta(q_{n-1}, \sigma_n) = q'$
 - Άρα $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ ανν
 $(q, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M \dots \vdash_M (q', w')$



$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_0, 11010)$$

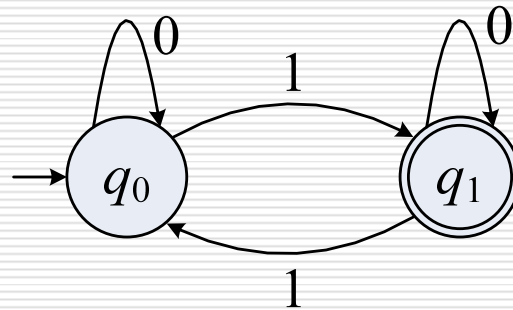
$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_0, 010)$$

$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_1, 0)$$

$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_1, \varepsilon)$$

Υπολογισμός DFA

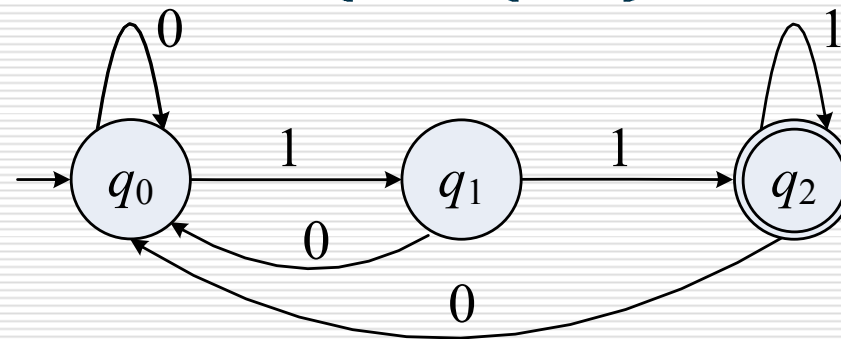
- DFA M δέχεται συμβ/ρά w ή w είναι αποδεκτό από M όταν
 - για κάποιο $q \in F, (s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$
- Γλώσσα M : $L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ είναι αποδεκτό από } M\}$
- Γλώσσα εικονιζόμενου DFA;



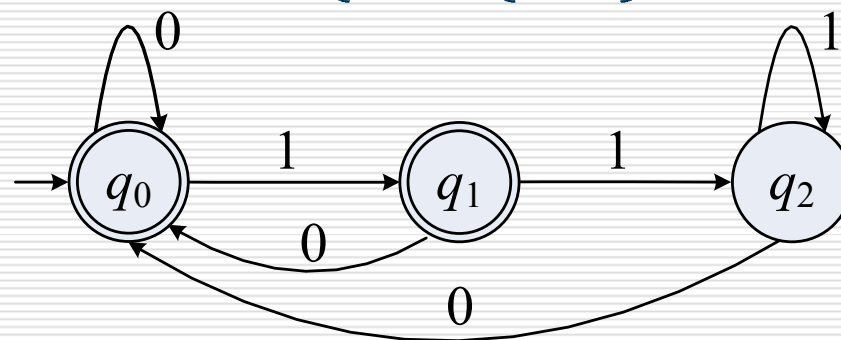
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ περιέχει περιττό αριθμό από } 1\}$$

Παράδειγμα

- DFA που δέχεται $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ τελειώνει σε } 11\}$

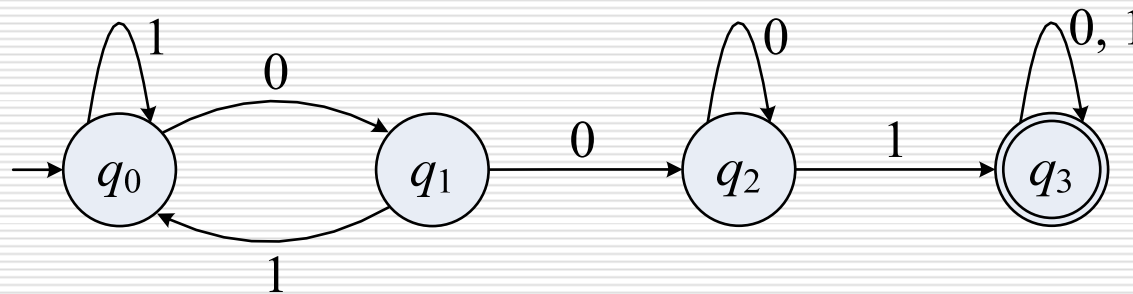


- DFA που δέχεται $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ δεν τελειώνει σε } 11\}$

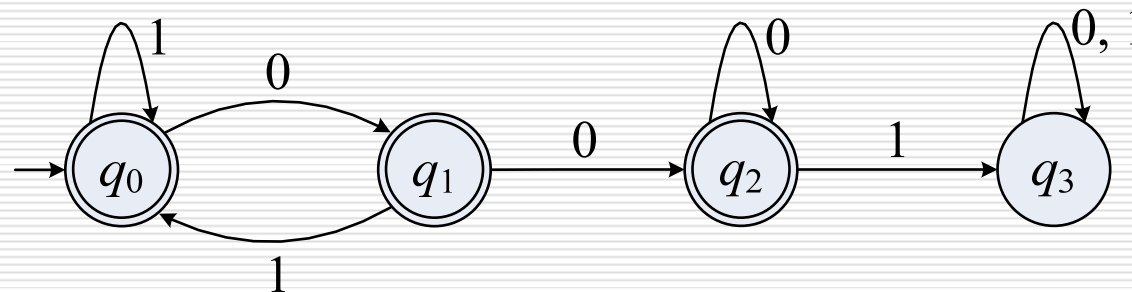


Παράδειγμα

- DFA που δέχεται $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ περιέχει } 001\}$



- DFA που δέχεται $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ δεν περιέχει } 001\}$



Μη Ντετερμινισμός

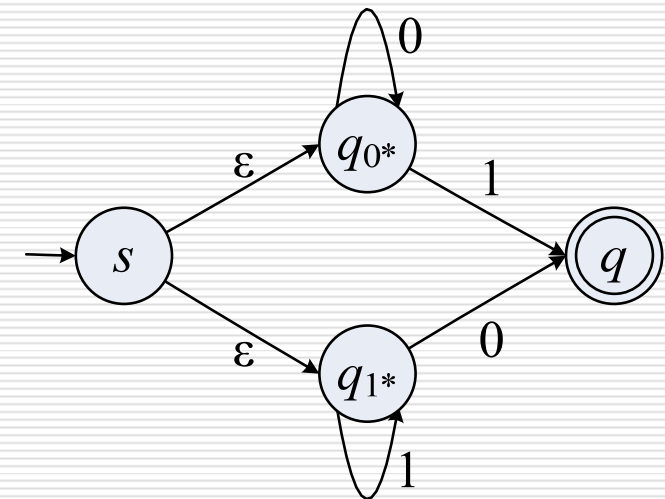
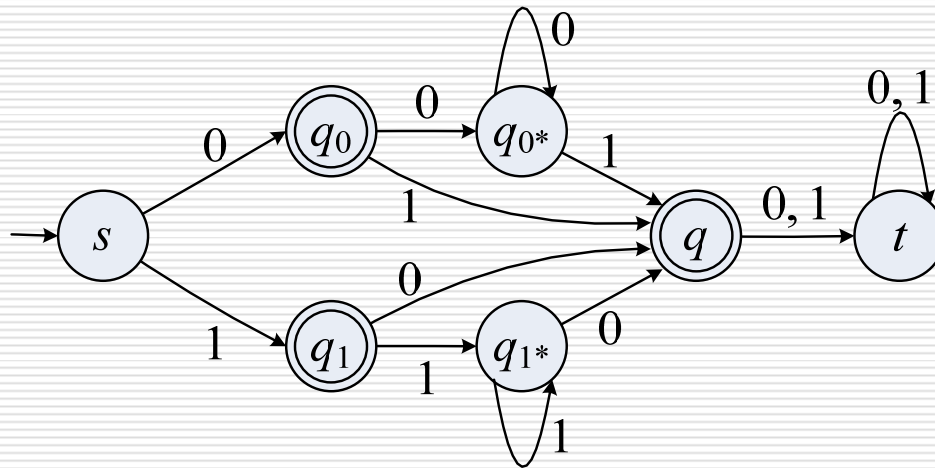
- **Ντετερμινισμός:** επόμενη κατάσταση **καθορίζεται** από τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου.
 - **Συνάρτηση** μετάβασης δ .
- **Μη Ντετερμινισμός:** αλλαγή κατάστασης **προσδιορίζεται μερικώς** από τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου.
 - Τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου: υπάρχουν **καμία ή περισσότερες επόμενες καταστάσεις**.
 - Μετάβαση **χωρίς να «καταναλωθεί»** σύμβολο εισόδου.
 - **Σχέση** (και **όχι συνάρτηση**) μετάβασης Δ .
 - Ισοδύναμα, συνάρτηση $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \mapsto \mathcal{P}(Q)$
 - Συμβ/ρά εισόδου **αποδεκτή** αν **υπάρχει** ακολουθία που οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής (όπου έχει «καταναλωθεί» είσοδος).

Παράδειγμα

- Ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει

$$0^*1 \cup 1^*0$$

$L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ έχει είτε ένα μόνο } 1 \text{ στο τέλος}$
 $\text{είτε ένα μόνο } 0 \text{ στο τέλος} \}$

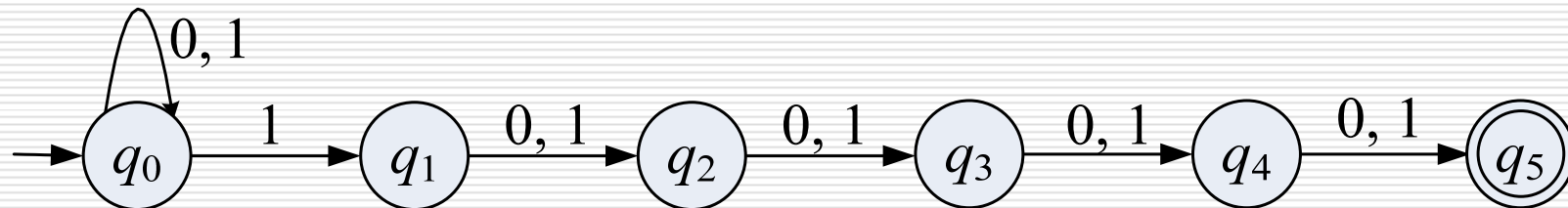


- Μη ντετερμινιστικό αυτόματο για L.

- Αποδέχεται αν **υπάρχει** τρόπος μετάβασης από $s \rightarrow q$
 - Αν υπάρχει, τον «μαντεύει» (δεν κάνει ποτέ λάθος)
 - Εκτελεί όλες τις επιτρεπτές **μεταβάσεις παράλληλα.**
- Υπολογισμός για 0001 και 00011.

Παράδειγμα

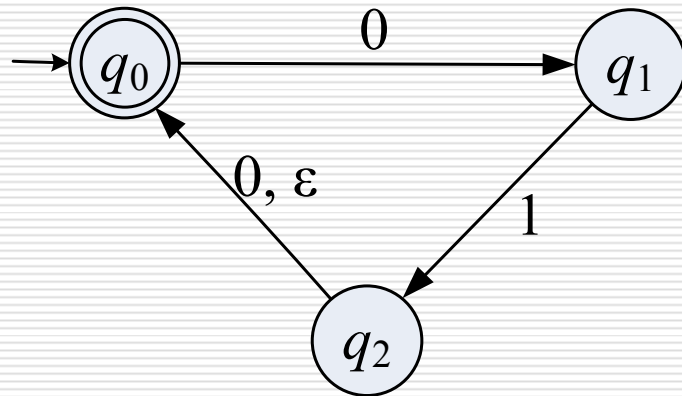
- Ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει
 $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ έχει } 1 \text{ στην } 5\text{η} \text{ θέση από δεξιά}\}$
 - Ο **ελάχιστος** #καταστάσεων είναι **32**.
- Μη ντετερμινιστικό αυτόματο;



- Υπολογισμός για 000, 11101111, 11111, 00010000.
- Παράδειγμα **δέντρου υπολογισμού**.

Ορισμός

- Ένα **μη ντετερμινιστικό** πεπερασμένο αυτόματο (NFA) είναι μια πεντάδα $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ όπου:
- Q ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων.
 - Σ ένα αλφάβητο (εισόδου).
 - $s \in Q$ η αρχική κατάσταση.
 - $F \subseteq Q$ το σύνολο των καταστάσεων αποδοχής.
 - $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ η **σχέση** μετάβασης.



$$Q = \{q_0, q_1, q_2\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$s = q_0,$$

$$F = \{q_0\}$$

Σχέση Δ

$$(q_0, 0, q_1)$$

$$(q_1, 1, q_2)$$

$$(q_2, 1, q_0)$$

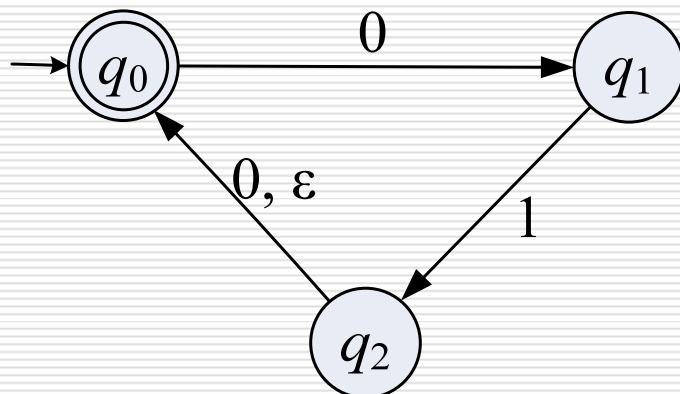
$$(q_2, \varepsilon, q_0)$$

Υπολογισμός NFA

- $M(K, \Sigma, \Delta, s, F)$ **αποδέχεται** συμβ/ρά w αν ξεκινώντας από **αρχική κατάσταση** s , αφού επεξεργαστεί w , το M **μπορεί να καταλήξει** σε κάποια **κατάσταση αποδοχής**.
- **Συνολική κατάσταση** (configuration) $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$
 - q τρέχουσα κατάσταση (αλλά μπορεί σε **πολλές!**).
 - w είσοδος που δεν έχει επεξεργασθεί ακόμη.
- Σχέση **παράγει άμεσα** $\vdash_M \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$
 - $(q, w) \vdash_M (q', w')$ αν και μόνο αν
 - $w = \sigma w'$ για κάποιο $\sigma \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$
 - $(q, \sigma, q') \in \Delta$

Υπολογισμός NFA

- Σχέση **παράγει** $\vdash_M^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$
 - $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ αν και μόνο αν υπάρχουν $n \geq 0$,
 $q_1, q_2, \dots, q_{n-1} \in Q$ και $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ τέτοια ώστε:
 - $w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w'$ και
 - $(q, \sigma_1, q_1), (q_1, \sigma_2, q_2), \dots, (q_{n-1}, \sigma_n, q') \in \Delta$
 - Άρα $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ ανν **δύναται**
 $(q, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M \dots \vdash_M (q', w')$



$$(q_0, 01010) \vdash_M (q_1, 1010)$$

$$(q_1, 1010) \vdash_M (q_2, 010)$$

$$(q_2, 010) \vdash_M (q_0, 010)$$

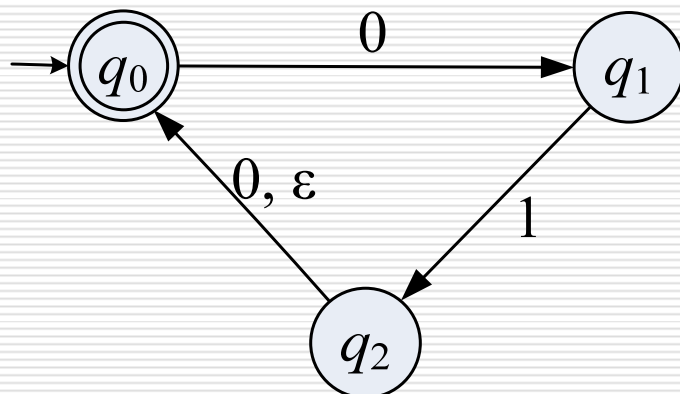
$$(q_0, 010) \vdash_M (q_1, 10)$$

$$(q_1, 10) \vdash_M (q_2, 0)$$

$$(q_2, 0) \vdash_M (q_0, \varepsilon)$$

Υπολογισμός NFA

- Σχέση **παράγει** $\vdash_M^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$
 - $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ αν και μόνο αν υπάρχουν $n \geq 0$,
 $q_1, q_2, \dots, q_{n-1} \in Q$ και $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ τέτοια ώστε:
 - $w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w'$ και
 - $(q, \sigma_1, q_1), (q_1, \sigma_2, q_2), \dots, (q_{n-1}, \sigma_n, q') \in \Delta$
 - Άρα $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ ανν **δύναται**
 $(q, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M \dots \vdash_M (q', w')$

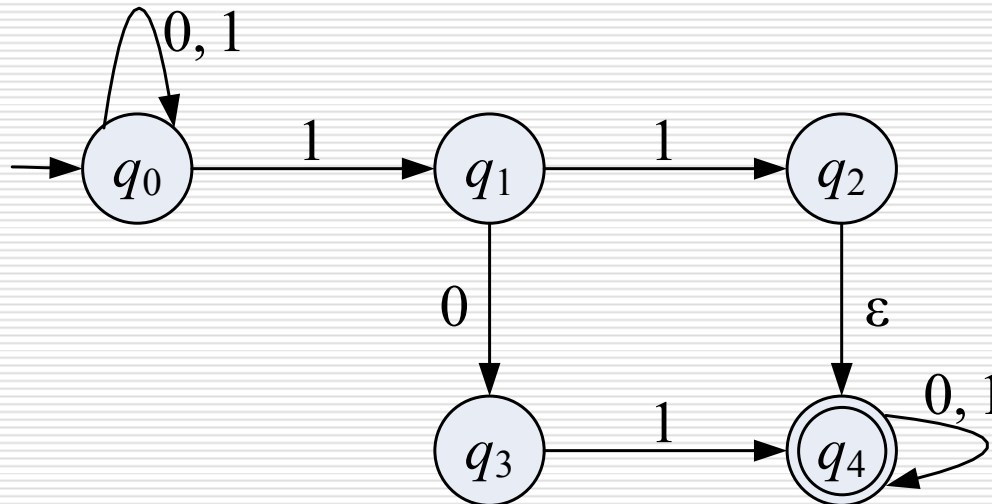


$$(q_0, 01010) \vdash_M^* (q_0, \varepsilon)$$
$$(q_0, 01010) \vdash_M^* (q_0, 10)$$

Υπολογισμός NFA

- NFA M δέχεται συμβ/ρά w ή w είναι αποδεκτό από M όταν
 - για κάποιο $q \in F, (s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$
- Γλώσσα M : $L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ είναι αποδεκτό από } M\}$
- Γλώσσα εικονιζόμενου NFA;

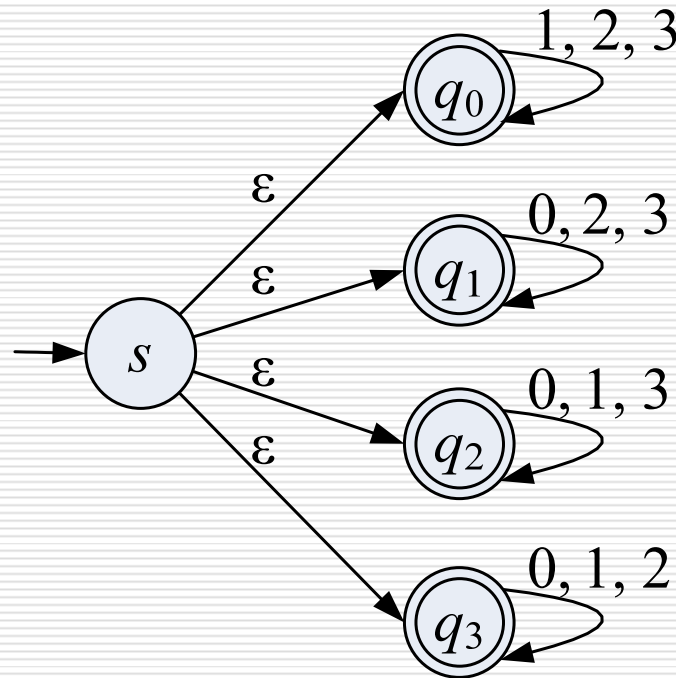
$$L(M) = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ περιέχει } 11 \text{ ή } 101\}$$



Παράδειγμα

□ NFA που δέχεται

$$L = \{w \in \{0, 1, 2, 3\}^* : \exists a \in \Sigma \text{ που δεν εμφανίζεται στο } w\}$$



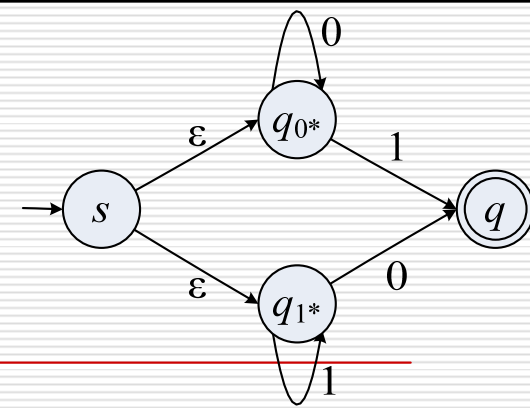
Μη Ντετερμινισμός

- Ντετερμινιστικός υπολογισμός: **μονοπάτι**.
 - Αποδοχή αν **καταλήγει σε** κατάσταση αποδοχής.
- Μη ντετερμινιστικός υπολογισμός: **δέντρο**.
 - Αποδοχή αν **υπάρχει** κλάδος που οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής.
- Ντετερμινιστικές μηχανές αποτελούν **ειδική περίπτωση** μη ντετερμινιστικών.
- **Δεν** πρόκειται για ρεαλιστικό μοντέλο υπολογισμού.
 - Διευκολύνουν **σχεδιασμό** και έλεγχο λειτουργίας.
 - Λειτουργία πιο **κοντά** στην «ανθρώπινη **σκέψη**».
 - **Ντετερμινιστική προσομοίωση**: λειτουργική ισοδυναμία. «Είναι αποτελεσματική;» αποτελεί την ουσία του **P vs NP**.

Ισοδυναμία DFA και NFA

- Αυτόματα M_1 και M_2 **ισοδύναμα**: $L(M_1) = L(M_2)$.
 - Αναγνωρίζουν ίδια γλώσσα με (ενδεχ.) διαφορετική μέθοδο.
- DFA είναι **ειδική περίπτωση** των NFA.
- Για κάθε **NFA** αυτόματο $M(Q, \Sigma, \Delta, s, F)$, υπάρχει **ισοδύναμο DFA** $M'(Q', \Sigma, \delta', s', F')$.
 - Δ ορίζεται ισοδύναμα ως $\Delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \mapsto \mathcal{P}(Q)$
 - NFA βρίσκεται (παράλληλα) σε **σύνολο καταστάσεων**:
 - Καταστάσεις M' είναι υποσύνολα Q , **$Q' \subseteq \mathcal{P}(Q)$**
 - **Επόμενη κατάσταση M'** : **σύνολο καταστάσεων** όπου καταλήγει M από **τρέχον σύνολο καταστάσεων** με συγκεκριμένο **σύμβολο εισόδου**.

Ισοδυναμία NFA και DFA



- Για μεταβάσεις με ε (κενή συμβολοσειρά):
 - Σύνολο καταστάσεων προσιτό από q χωρίς είσοδο.

$$E(q) = \{p \in Q : (q, \varepsilon) \vdash_M^* (p, \varepsilon)\}$$

- Περιγραφή ντετερμινιστικού M' :

$$Q' = \mathcal{P}(Q) \quad \text{Όλα τα υποσύνολα του } Q$$

$$s' = E(s) \quad \text{Σύνολο με κατ. προσπελάσιμες από } s \text{ με } \varepsilon$$

$$F' = \{S \in \mathcal{P}(Q) : S \cap F \neq \emptyset\} \quad \text{Σύνολα με κατ. αποδοχής του } M$$

$$\delta'(S, \sigma) = \bigcup_{p \in Q: \exists q \in S \text{ τ.ω. } (q, \sigma, p) \in \Delta} E(p) \quad \forall S \in \mathcal{P}(Q), \forall \sigma \in \Sigma$$

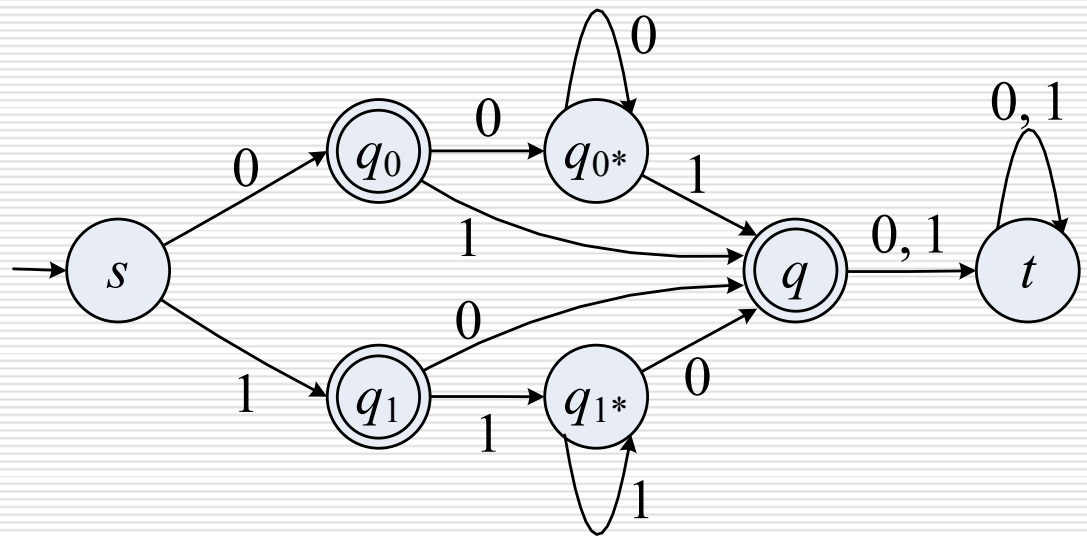
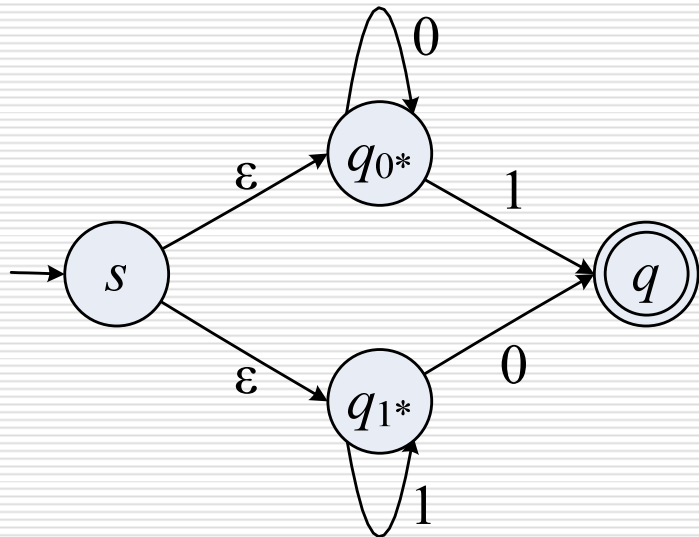
- DFA M' προσομοιώνει NFA M (απόδειξη με επαγωγή στο $|w|$):

$$\forall w \in \Sigma^*, \forall q, p \in Q, \exists S_q, S_p \subseteq Q, E(q) \subseteq S_q, p \in S_p :$$

$$(q, w) \vdash_M^* (p, \varepsilon) \Leftrightarrow (S_q, w) \vdash_{M'}^* (S_p, \varepsilon)$$

Παράδειγμα

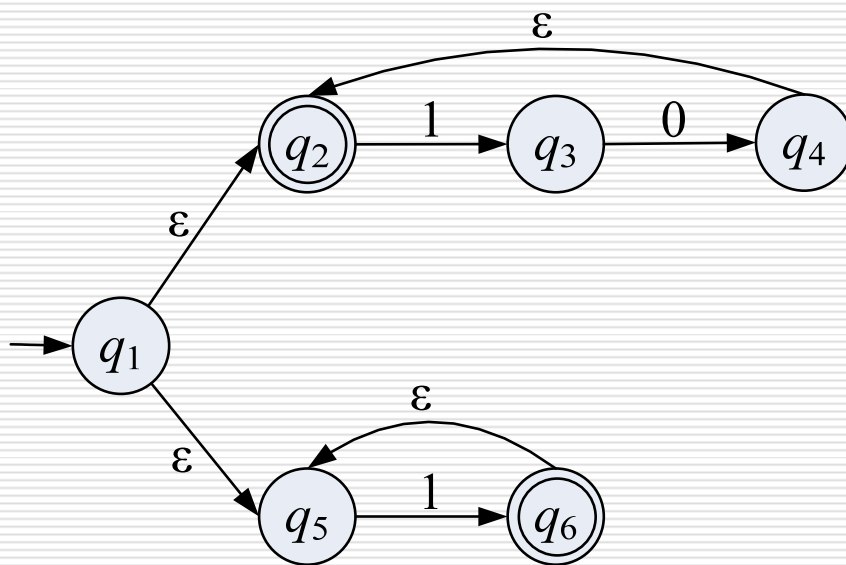
$$\delta'(S, \sigma) = \bigcup_{p \in Q: \exists q \in S \text{ τ.ω. } (q, \sigma, p) \in \Delta} E(p)$$



Παράδειγμα

□ **Κατασκευαστική** απόδειξη (εκθετικός χρόνος λόγω $P(Q)$).

$$\begin{aligned}\delta'(S, \sigma) &= \bigcup_{p \in Q: \exists q \in S \text{ τ.ω. } (q, \sigma, p) \in \Delta} E(p) \\ &= \{p \in Q : (q, \sigma) \vdash_M^* (p, \varepsilon) \text{ για κάποιο } q \in S\}\end{aligned}$$



$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_5\}$$

$$E(q_2) = \{q_2\}$$

$$E(q_3) = \{q_3\}$$

$$E(q_4) = \{q_2, q_4\}$$

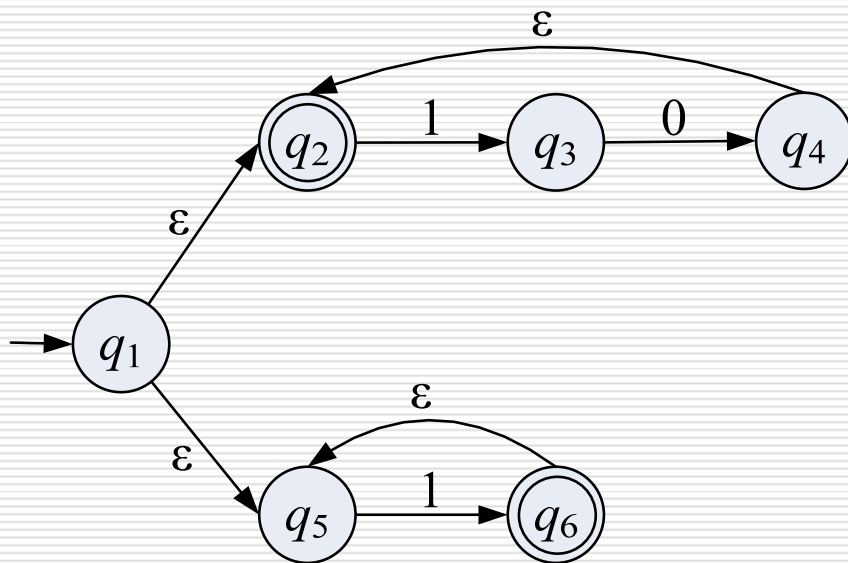
$$E(q_5) = \{q_5\}$$

$$E(q_6) = \{q_5, q_6\}$$

$$s' = \{q_1, q_2, q_5\}$$

Παράδειγμα

$$\delta'(S, \sigma) = \bigcup_{p \in Q: q \in S \wedge (q, \sigma, p) \in \Delta} E(p)$$



q	σ	$\delta(q, \sigma)$
$\{q_1, q_2, q_5\}$	0	\emptyset
$\{q_1, q_2, q_5\}$	1	$\{q_3, q_5, q_6\}$
$\{q_3, q_5, q_6\}$	0	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_3, q_5, q_6\}$	1	$\{q_5, q_6\}$
$\{q_2, q_4\}$	0	\emptyset
$\{q_2, q_4\}$	1	$\{q_3\}$
$\{q_5, q_6\}$	0	\emptyset
$\{q_5, q_6\}$	1	$\{q_5, q_6\}$
$\{q_3\}$	0	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_3\}$	1	\emptyset
\emptyset	0	\emptyset
\emptyset	1	\emptyset