Στοιχεία Κατηγορηματικής Λογικής

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Κατηγορηματική Λογική

- Προτασιακή Λογική: πλαίσιο διατύπωσης και μελέτης επιχειρημάτων για πεπερασμένο πλήθος «λογικών αντικειμένων».
  - «Λογικό αντικείμενο»: παίρνει τιμές αλήθειας, Α ή Ψ.
  - Διαφορετικά, «μη λογικό αντικείμενο», π.χ. αριθμοί, σύνολα, ...
- Κατηγορηματική (ή Πρωτοβάθμια) Λογική: πλαίσιο διατύπωσης και μελέτης επιχειρημάτων για:
  - «Μη λογικά αντικείμενα» (αριθμούς, σύνολα, γραφήματα).
  - **Πράξεις** (συναρτήσεις) και **σχέσεις** (κατηγορήματα) μεταξύ τους.
  - Άπειρο πλήθος αντικειμένων: ποσοδείκτες.
  - «Κάθε φυσικός αριθμός είναι είτε άρτιος είτε περιττός».
  - «Υπάρχει σύνολο που είναι υποσύνολο κάθε συνόλου».
  - Τύποι ΚΛ είναι «λογικά αντικείμενα» που μπορεί να αφορούν / αναφέρονται σε «μη λογικά αντικείμενα».

Συντακτικό Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

- «Λογικά Σύμβολα»: έχουν συγκεκριμένη ερμηνεία, λειτουργούν πάντα με τον ίδιο τρόπο:
  - Λογικοί σύνδεσμοι: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Ποσοδείκτες: $\forall$ και $\exists$
    - $\forall$ (για κάθε): **σύζευξη** για όλα στοιχεία δομής (δυνάμει άπειρη).
    - $\exists$ (υπάρχει): **διάζευξη** για όλα στοιχεία δομής (δυνάμει άπειρη).
  - Σημεία στίξης και παρενθέσεις.

Συντακτικό Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

- «Μη Λογικά Σύμβολα»: ερμηνεία καθορίζει λειτουργία τους.
  - Ορισμός γλώσσας και έλεγχος αλήθειας απαιτούν ερμηνεία τους (πολυσημία, εκφραστικότητα!).
  - Μεταβλητές x, y, z, …
    - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού μεταβλητών: σύμπαν.
    - Ελεύθερες: τιμή τους καθορίζεται με αποτίμηση.
    - Δεσμευμένες: ποσοδείκτες καθορίζουν «συμπεριφορά» τους.
  - Σύμβολα σταθερών c, c_1, c_2, …
    - Αναπαριστούν συμβολικά συγκεκριμένες τιμές σύμπαντος.
    - Ερμηνεία καθορίζει τιμή κάθε συμβόλου σταθεράς.
    - Πρόκειται για 0-θέσια συναρτησιακά σύμβολα.

Συντακτικό Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

- «Μη Λογικά Σύμβολα»: ερμηνεία καθορίζει λειτουργία τους.
  - Συναρτησιακά σύμβολα f, g, h, …, με αντίστοιχο πλήθος ορισμάτων.
    - Π.χ. f είναι 2-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο.
    - Εκφράζουν «**πράξεις**» μεταξύ στοιχείων σύμπαντος.
    - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, και **λειτουργία**.
  - Κατηγορηματικά σύμβολα P, Q, R, …, με αντίστοιχο πλήθος ορισμάτων.
    - Π.χ. Q είναι 2-μελές κατηγορηματικό σύμβολο.
    - Εκφράζουν «**σχέσεις**» μεταξύ στοιχείων σύμπαντος.
    - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού και **λειτουργία**.
    - Ισότητα = : ελέγχει **ταύτιση** (λειτουργεί ως κατηγόρημα), αλλά έχει δεδομένη ερμηνεία.
  - Κατηγορηματικά σύμβολα υλοποιούν «μετάβαση» από «μη λογικό» σε «λογικό» κόσμο.
    - Q(x, y) δέχεται δύο στοιχεία σύμπαντος (π.χ. αριθμούς), «ελέγχει» αν σχετίζονται με συγκεκριμένο τρόπο, και «απαντά» Α ή Ψ.

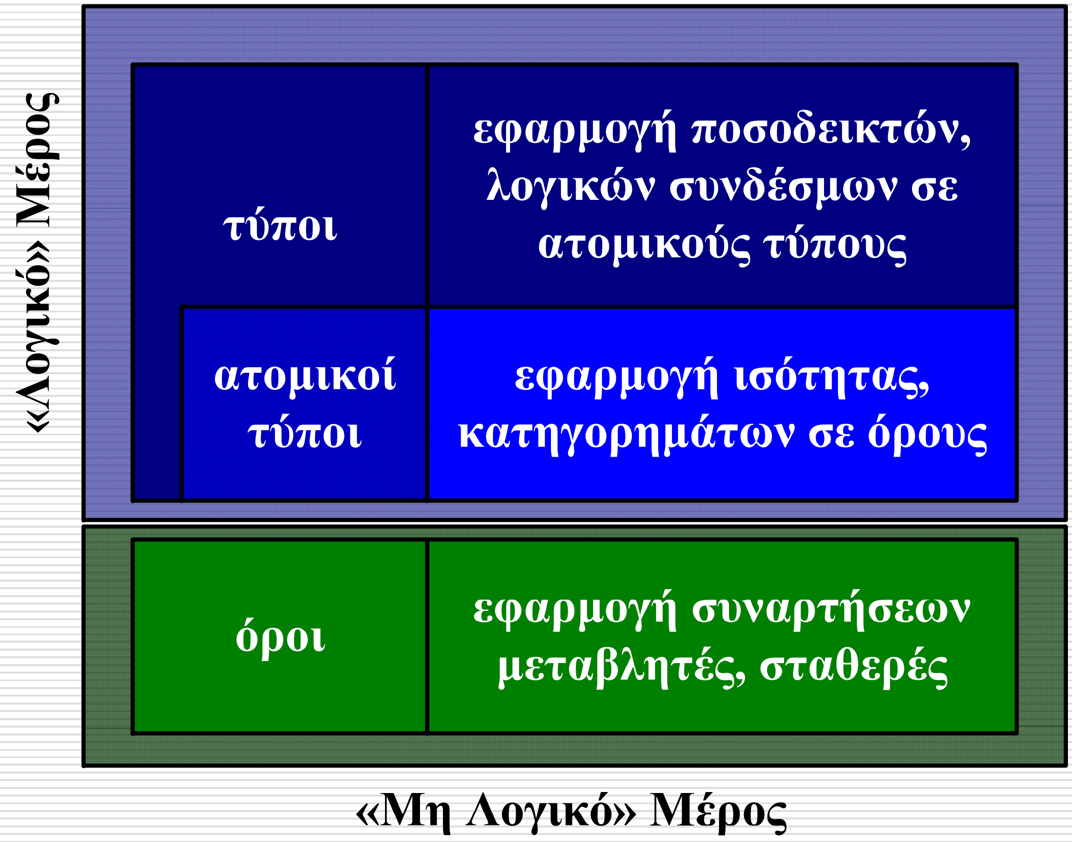
Δομή Τύπων Πρωτοβάθμιας Γλώσσας: Όροι

- Όροι παίρνουν τιμές στο σύμπαν.
  - Μεταβλητές $x, y, z, \ldots$
  - Σταθερές $c, c_1, c_2, ..$
  - Οτιδήποτε προκύπτει από (σωστή) εφαρμογή συναρτησιακού συμβόλου σε ήδη σχηματισμένους όρους.
    - Π.χ. $f(x, y)$, $f(g(x), c)$, $g(f(x, g(y)), c \oplus f(x, y), \ldots$
- Δομή αναπαρίσταται με δενδροδιάγραμμα, ιδιότητες αποδεικνύονται με δομική επαγωγή.
- Όροι **δεν** μπορούν να συνδέονται με λογικούς συνδέσμους!

Δομή Τύπων Πρωτοβάθμιας Γλώσσας: Τύποι

- Ατομικοί τύποι προκύπτουν εφαρμόζοντας ισότητα ή κατηγορηματικό σύμβολο σε όρους.
  - Π.χ. $x = c$, $f(x, y) = g(c)$, $Q(x, y)$, $R(f(x, y))$, …
  - «Λογικές» τιμές Α ή Ψ, βασικά («λογικά») δομικά στοιχεία τύπων.
- Τύπος:
  - Ατομικός τύπος (βάση επαγωγικού ορισμού).
  - Εφαρμογή λογικών συνδέσμων σε τύπους φ, ψ: $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$.
  - Εφαρμογή ποσοδεικτών σε τύπο φ: $\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$.
- Δομή αναπαρίσταται με δενδροδιάγραμμα, ιδιότητες αποδεικνύονται με μαθηματική επαγωγή.
- Τύποι: τιμή Α ή Ψ. Όροι: τιμές στο σύμπαν.

Δομή Τύπων Πρωτοβάθμιας Γλώσσας



Παράδειγμα

- Ποια από τα παρακάτω είναι όροι ή τύποι (ή συντακτικό λάθος);
  - $Q(f(c, y), P(x))$ — $g(Q(c, y), P(y))$
  - $Q(f(c, y), \mathbf{P(x)})$ — $g(\mathbf{Q(c, y)}, \mathbf{P(y)})$
  - $\forall x\ P(g(x))$ — $\forall x\ g(P(x))$
  - $\forall x\ P(g(x))$ (τ) — $\forall x\ \mathbf{g}(P(x))$
  - $x = y \vee c$ — $x = f(y, c)$
  - $x = \mathbf{y} \vee \mathbf{c}$ — $x = f(y, c)$ (ατ)
  - $\forall x\ P(P(x))$ — $\exists x\ Q(x, c_1)$
  - $\forall x\ P(\mathbf{P(x)})$ — $\exists x\ Q(x, c_1)$ (τ)
  - $\exists x\ (P(x) \vee \neg\forall x\ P(x, x))$ — $\exists x(x = y \wedge Q(x, y))$
  - $\exists x\ (\mathbf{P(x)} \vee \neg\forall x\ \mathbf{P(x, x)})$ — $\exists x(x = y \wedge Q(x, y))$ (τ)

Παράδειγμα

- Ποια από τα παρακάτω είναι όροι ή τύποι (ή συντακτικό λάθος);
  - $P(x) \vee g(x)$
  - $P(x) \vee \mathbf{g(x)}$
  - $\exists x\ Q(x, c)$
  - $\exists x\ Q(x, c)$ (τ)
  - $x + y = x * y$
  - $x + y = x * y$ (ατ)
  - $\forall x\ \exists y\ (x + y = x * y)$
  - $\forall x\ \exists y\ (x + y = x * y)$ (τ)
  - $\forall y\ \exists x\ (Q(x, g(y)) \vee P(g(x)))$
  - $\forall y\ \exists x\ (Q(x, g(y)) \vee P(g(x)))$ (τ)
  - $\forall\exists x\ Q(x, y)$
  - $\forall\exists x\ Q(x, y)$
  - $(3 + 1) + 10$
  - $(3 + 1) + 10$ (ορ)
  - $\forall x\ \exists y\ (P(x) \vee (Q(x, y) \rightarrow \neg P(x)))$
  - $\forall x\ \exists y\ (P(x) \vee (Q(x, y) \rightarrow \neg P(x)))$ (τ)

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Δεσμευμένη **εμφάνιση** μεταβλητής: εμπίπτει σε **πεδίο εφαρμογής** ποσοδείκτη.
  - Ποσοδείκτης καθορίζει πως αποτιμάται η μεταβλητή.
  - $\forall$ ($\exists$): σύζευξη (διάζευξη) για όλες τιμές σύμπαντος.
  - Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητής x που εμπίπτουν στον **ίδιο** ποσοδείκτη: «ίδια» δεσμευμένη μεταβλητή.
  - Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητής x που εμπίπτουν σε **διαφορετικό** ποσοδείκτη: «διαφορετικές» δεσμευμένες μεταβλητές.
- Ελεύθερη **εμφάνιση** μεταβλητής: **δεν** εμπίπτει σε πεδίο εφαρμογής κάποιου ποσοδείκτη.
  - Μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή, η οποία καθορίζεται από αποτίμηση.
  - Όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητής x: «ίδια» μεταβλητή.
- $\exists \mathbf{x}(P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \wedge P(\mathbf{y})$ και $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge P(\mathbf{y})$

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Ελεύθερη μεταβλητή αν εμφανίζεται ελεύθερη (τουλ. μία φορά), διαφορετικά δεσμευμένη.
- Πρόταση: τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.
  Τιμή αλήθειας πρόταση δεν εξαρτάται από αποτίμηση.

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Ποιές εμφανίσεις μεταβλητών είναι ελεύθερες και ποιές δεσμευμένες;
  - $\forall y \exists x (P(x, f(y)) \vee Q(x))$ $\quad$ $\forall x \exists y (Q(x) \vee P(x, y)) \rightarrow \neg Q(x)$
  - $\forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x} (P(\mathbf{x}, f(\mathbf{y})) \vee Q(\mathbf{x}))$ $\quad$ $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} (Q(\mathbf{x}) \vee P(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \rightarrow \neg Q(\mathbf{x})$
  - $\forall x P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, x)$ $\quad$ $Q(z) \rightarrow \neg \forall x \forall y P(x, y)$
  - $\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{z} P(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ $\quad$ $Q(\mathbf{z}) \rightarrow \neg \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
  - $\forall x Q(x) \rightarrow \forall y P(x, y)$ $\quad$ $\forall x \forall y \forall z (x > y \wedge y > z) \rightarrow \exists w (x > w)$
  - $\forall \mathbf{x} Q(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{y} P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $\quad$ $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{z} (\mathbf{x} > \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} > \mathbf{z}) \rightarrow \exists \mathbf{w} (\mathbf{x} > \mathbf{w})$
  - $y + x = x + y$ $\quad$ $\exists y (x + x = x * y)$
  - $\mathbf{y} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ $\quad$ $\exists \mathbf{y} (\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{y})$
- Μετονομασία όλων εμφανίσεων της «ίδιας» μεταβλητής διατηρεί απαράλλακτο τον τύπο: αλφαβητική παραλλαγή.

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Ελεύθερη μεταβλητή αν εμφανίζεται ελεύθερη (τουλ. μία φορά), διαφορετικά δεσμευμένη.
- Πρόταση: τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.
  Τιμή αλήθειας πρόταση δεν εξαρτάται από αποτίμηση.
- Ελεύθερες μεταβλητές χρειάζονται «αρχικοποίηση».
  - Όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις μιας μεταβλητής «αρχικοποιούνται» στην ίδια τιμή (αυτή που καθορίζεται από αποτίμηση).
- Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών δεν χρειάζονται «αρχικοποίηση».
  - Ποσοδείκτης που τις δεσμεύει καθορίζει αποτίμηση.
  - Μεταβλητές που δεσμεύονται από διαφορετικούς ποσοδείκτες είναι «διαφορετικές» (ακόμη και αν έχουν το ίδιο όνομα).

Ερμηνεία (ή Δομή)

- Ορισμός Πρωτοβάθμιας Γλώσσας απαιτεί **ερμηνεία** «μη λογικών» συμβόλων.
- Ερμηνεία (ή δομή) Α καθορίζει:
  - Σύμπαν |Α|: πεδίο ορισμού σταθερών, μεταβλητών, συναρτήσεων, και κατηγορημάτων.
    - |Α| είναι το σύνολο αντικειμένων στα οποία αναφερόμαστε.
  - Ορισμός συναρτησιακών συμβόλων: «πράξη» που αντιστοιχούν.
    - Τι «επιστρέφει» κάθε συναρτησιακό σύμβολο.
  - Ορισμός κατηγορηματικών συμβόλων: «σχέση» που αντιστοιχούν.
    - Πότε κατηγορηματικό σύμβολο «επιστρέφει» Α και πότε Ψ.
  - Ορισμός τιμής για κάθε σύμβολο σταθεράς.

Παραδείγματα Ερμηνείας

- Γλώσσα Θεωρίας Αριθμών:
  - Σύμπαν **N** (φυσικοί αριθμοί)
  - Σταθερά **0** (αποτ. στο 0), συναρτησιακά $\oplus$ (πρόσθεση), $\otimes$ (πολλαπλασιασμός), και **′** (επόμενος φυσικός),
  - κατηγορηματικό $<$ (αντ. σε σχέση $x < y$).
- Γλώσσα Θεωρίας Συνόλων:
  - Σύμπαν δυναμοσύνολο συνόλου U (ή σύνολο με στοιχεία σύνολα)
  - Σταθερά $\varnothing$ (αποτ. στο $\varnothing$),
  - κατηγορηματικό $\subseteq$ (αντ. σε σχέση $x \subseteq y$).

Εναλλαγή Ποσοδεικτών

	P(x, y): ο x θαυμάζει τον y	P(x, y): x ≤ y
$\forall x \exists y P(x,y)$	όλοι θαυμάζουν κάποιον (όχι αναγκαία όλοι τον ίδιο, μπορεί τον εαυτό τους).	κάθε αριθμός έχει κάποιον μεγαλύτερο ή ίσο του.
$\forall x \exists y P(y,x)$	όλοι θαυμάζονται από κάποιον (όχι αναγκαία όλοι από τον ίδιο, μπορεί από εαυτό τους).	κάθε αριθμός έχει κάποιον μικρότερο ή ίσο του.
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall x \forall y P(y,x)$	όλοι θαυμάζουν τους πάντες (και τον εαυτό τους).	για κάθε ζευγάρι αριθμών, ο ένας είναι μικρότερος ή ίσος του άλλου.
$\exists x \forall y P(x,y)$	υπάρχει κάποιος που τους θαυμάζει όλους (και εαυτό του).	υπάρχει αριθμός μικρότερος ή ίσος όλων (κάτω φράγμα).
$\exists x \forall y P(y,x)$	υπάρχει κάποιος που τον θαυμάζουν όλοι (και εαυτός του).	υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος όλων (άνω φράγμα)
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists x \exists y P(y,x)$	υπάρχει ζευγάρι (όχι αναγκαία διαφορετικών) που ο ένας θαυμάζει τον άλλο.	υπάρχουν αριθμοί που ο ένας είναι μικρότερος ή ίσος του άλλου.

Νόμοι Άρνησης Ποσοδεικτών:

$$\neg\exists x\varphi(x) \equiv \forall x\neg\varphi(x)$$

$$\neg\forall x\varphi(x) \equiv \exists x\neg\varphi(x)$$

Εκφραστικότητα Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

- Δεδομένης ερμηνείας (π.χ. φυσικοί αριθμοί, σύνολα, γραφήματα), διατύπωση προτάσεων – ιδιοτήτων σε πρωτοβάθμια γλώσσα.
  - Όλοι οι άνθρωποι θαυμάζουν κάποιον άλλο. $\forall x\exists y(x \neq y \wedge P(x,y))$ $\neg\exists x\forall y(x \neq y \rightarrow \neg P(x,y))$
  - Υπάρχει κάποιος που δεν θαυμάζει κανέναν άλλο. $\exists x\forall y(x \neq y \rightarrow \neg P(x,y))$
  - Υπάρχει κάποιος που θαυμάζει τον εαυτό του και μόνον αυτόν. $\exists x(P(x,x) \wedge \forall y(P(x,y) \rightarrow x = y))$
  - Όλοι θαυμάζονται από κάποιον άλλο. $\forall x\exists y(x \neq y \wedge P(y,x))$
  - Υπάρχει κάποιος που θαυμάζει όλους τους άλλους. $\exists x\forall y(x \neq y \rightarrow P(x,y))$
  - Υπάρχει κάποιος που δεν θαυμάζει κανέναν. $\exists x\forall y\neg P(x,y)$
  - Δεν υπάρχει κανένας άνθρωπος που να τον θαυμάζουν όλοι οι άλλοι. $\neg\exists x\forall y(x \neq y \rightarrow P(y,x))$ $\forall x\exists y(x \neq y \wedge \neg P(y,x))$

Εκφραστικότητα

- Απλές γλωσσικές δομές συνήθως επαρκούν.
- Κάθε αντικείμενο με ιδιότητα P έχει ιδιότητα Q. $\forall x(P(x) \to Q(x))$
  - Ο επόμενος κάθε περιττού αριθμού είναι άρτιος. $\forall x(\mathrm{odd}(x) \to \mathrm{even}(x'))$
    $\mathrm{even}(x) \equiv \exists y(x = 2 \otimes y)$
    $\mathrm{odd}(x) \equiv \exists y(x = (2 \otimes y) \oplus 1)$
    όπου $1 \equiv 0'$ και $2 \equiv (0')'$
  - Κάθε πολλαπλάσιο του 4 είναι άρτιος. $\forall x(\exists y(x = 4 \otimes y) \to \mathrm{even}(x))$
- Υπάρχει αντικείμενο με ιδιότητα P και ιδιότητα Q $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
  - Δεν είναι όλοι οι άρτιοι πολλαπλάσια του 4. $\exists x(\mathrm{even}(x) \wedge \neg \exists y(x = 4 \otimes y))$

Εκφραστικότητα

- Υπάρχει μοναδικό αντικείμενο με ιδιότητα P.

$$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \to y = x))$$

- Υπάρχει μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο με ιδιότητα P.

$$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \to y \leq x))$$

$$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \to x \leq y))$$

  - Υπάρχει μοναδικός φυσικός που είναι μικρότερος του 1.

$$\exists x(x < 1 \land \forall y(y < 1 \to x = y))$$

Εκφραστικότητα: Αριθμοί

- Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος. $\forall x \forall y(\mathrm{odd}(x) \wedge \mathrm{odd}(y) \rightarrow \mathrm{even}(x \oplus y))$
- Ο x διαιρεί ακριβώς τον y: $D(x, y) \equiv \exists z(y = x \otimes z)$
- Ο x είναι μικρότερος ή ίσος του y: $x \leq y \equiv \exists z(y = x \oplus z)$
- Ο x είναι πρώτος αριθμός:

$$\mathrm{prime}(x) \equiv (x \neq 0) \wedge (x \neq 1) \wedge \forall y \forall z(x = y \otimes z \rightarrow (y = x \vee z = x))$$

Εκφραστικότητα: Αριθμοί

- Κάθε άρτιος μεγαλύτερος του 4 γράφεται ως άθροισμα δύο περιττών πρώτων αριθμών (εικασία του Goldbach).

  $$\forall x((\mathrm{even}(x) \land 4 < x) \to$$
  $$\to \exists y \exists z(\mathrm{prime}(y) \land \mathrm{odd}(y) \land \mathrm{prime}(z) \land \mathrm{odd}(z) \land x = y \oplus z))$$

- Για κάθε φυσικό αριθμό (έστω n), υπάρχει άλλος (έστω m) που είναι ο μέγιστος μεταξύ εκείνων που το διπλάσιό τους δεν ξεπερνά τον αρχικό (δηλ. το n).

  $$\forall n \exists m(2 \otimes m \le n \land \forall k(2 \otimes k \le n \to k \le m))$$

  ή ισοδύναμα $\forall n \exists m(P(m,n) \land \forall k(P(k,n) \to k \le m))$

  όπου $P(m,n) \equiv 2 \otimes m \le n$

Εκφραστικότητα: Σύνολα

- Ερμηνεία με σύμπαν δυναμοσύνολο πεπερασμένου συνόλου S, 2-μελές κατηγορηματικό σύμβολο Q με ερμηνεία Q(x, y) $\equiv x \subseteq y$, και σταθερά c που ερμηνεύεται ως το κενό σύνολο ($\varnothing$).
  - Υπάρχει σύνολο που περιέχει (ως υποσύνολα) κάθε σύνολο. $\exists x \forall y Q(y, x)$
  - Το κενό σύνολο έχει μόνο ένα υποσύνολο, τον εαυτό του. $Q(c, c) \wedge \forall x (Q(x, c) \rightarrow x = c)$
  - Για κάθε ζευγάρι συνόλων υπάρχει κοινό υποσύνολο που είναι το μεγαλύτερο δυνατό (τομή συνόλων).
    $\forall x \forall y \exists z [Q(z, x) \wedge Q(z, y) \wedge \forall w (Q(w, x) \wedge Q(w, y) \rightarrow Q(w, z))]$
  - Για κάθε ζευγάρι συνόλων υπάρχει κοινό υπερσύνολο που είναι το ελάχιστο δυνατό (ένωση συνόλων).
    $\forall x \forall y \exists z [Q(x, z) \wedge Q(y, z) \wedge \forall w (Q(x, w) \wedge Q(y, w) \rightarrow Q(z, w))]$

Εκφραστικότητα

- Τύπος φ(x) με **ελεύθερη μεταβλητή** x ορίζει σύνολο

$$A_\varphi = \{ a \in |A| : \varphi(a) \text{ αληθεύει στην } A \}$$

  - φ(x): ιδιότητα στοιχείων της δομής (όπως κατηγορήματα).
  - Πρόταση ψ: ιδιότητα της ίδιας της δομής.
- Να ορίσετε έτσι (i) το $\emptyset$, (ii) το {1}, και (iii) το {0, 1, 2, 3, …}.
  - (i) $x = x + 1$, (ii) $x = 1$, (iii) $x = x$.
- Να ορίσετε έτσι τα {0} και {1} (χωρίς σταθερά 0, συνάρτηση ′).
  - x είναι ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης: $\forall y(x + y = y)$.
  - Η δομή έχει ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση: $\exists x \forall y(x + y = y)$.
  - x είναι ουδέτερο στοιχείο του πολ/μού: $\forall y(x \times y = y)$.
  - Η δομή έχει ουδέτερο στοιχείο για τον πολ/μό: $\exists x \forall y(x \times y = y)$.

Εκφραστικότητα

- Τύπος $\varphi(x)$ με **ελεύθερη μεταβλητή** x ορίζει σύνολο

$$A_\varphi = \{ a \in |A| : \varphi(a) \text{ αληθεύει στην } A \}$$

  - $\varphi(x)$: ιδιότητα στοιχείων της δομής (όπως κατηγορήματα).
  - Αντίστοιχη πρόταση, π.χ. $\exists x\, \varphi_1(x)$, $\exists x\, \varphi_0(x)$, $\forall x\, \varphi_0(x)$: ιδιότητα της ίδιας της δομής.
- Ερμηνεία ακεραίων με συναρτήσεις $+$, $\times$.
- Να ορίσετε έτσι το $\{1\}$, το $\{2\}$, το $\{1, \ldots, n\}$, το $\{-1\}$
  - $\varphi_1(x) \equiv \forall y(x \times y = y)$
  - $\varphi_2(x) \equiv \exists y(\varphi_1(y) \wedge x = y + y)$
  - $\varphi_{[n]}(x) \equiv \exists y(\varphi_1(y) \wedge (x = y \vee x = y + y \vee \ldots \vee x = y + \ldots + y))$
  - $\varphi_0(x) \equiv \forall y(x + y = y)$
  - $\varphi_{-1}(x) \equiv \exists y \exists z(\varphi_1(y) \wedge \varphi_0(z) \wedge x + y = z)$

Σημασιολογική Προσέγγιση

- A |= φ[v] : στην ερμηνεία A, η αποτίμηση v επαληθεύει (ή ικανοποιεί) τον φ.
  - Αποτίμηση v καθορίζει τιμές ελεύθερων μεταβλητών του φ και μόνο.
- A |= φ : ο φ ικανοποιείται από κάθε αποτίμηση στην ερμηνεία A.
  - Ο φ αληθής στην A ή η ερμηνεία A αποτελεί **μοντέλο** για τον φ.
- |= φ : ο φ ικανοποιείται σε κάθε ερμηνεία.
  - Ο φ είναι (λογικά) **έγκυρος** (αντίστοιχο ταυτολογίας).
  - Ταυτολογίες «δίνουν» λογικά έγκυρους τύπους με συντακτική αντικατάσταση.
- Εγκυρότητα / ικανοποιησιμότητα / αλήθεια φ ελέγχεται με εφαρμογή του ορισμού αλήθειας του Tarski.

Ορισμός Tarski

- Ερμηνεύει λογικούς συνδέσμους και ποσοδείκτες.
- Ορίζει ότι ένας τύπος φ αληθεύει (σε μια ερμηνεία A, για μια αποτίμηση v) ανν το νόημα του εκφράζει μια **αλήθεια** στην A.
- Η έννοια $A \models \varphi[v]$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
  - $A \models (x = y)[v]$ ανν ($v(x) = v(y)$).
  - $A \models Q(x_1, \ldots, x_n)[v]$ ανν ($(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \in Q^A$).
  - $A \models \neg\psi[v]$ ανν (δεν ισχύει ότι $A \models \psi[v]$).
  - $A \models (\psi \wedge \chi)[v]$ ανν ($A \models \psi[v]$ και $A \models \chi[v]$).
  - $A \models (\psi \vee \chi)[v]$ ανν ($A \models \psi[v]$ ή $A \models \chi[v]$).
  - $A \models (\psi \rightarrow \chi)[v]$ ανν (όταν $A \models \psi[v]$, τότε $A \models \chi[v]$).
  - $A \models (\psi \leftrightarrow \chi)[v]$ ανν ($A \models \psi[v]$ ανν $A \models \chi[v]$).
  - $A \models \forall x\psi[v]$ ανν (για κάθε $\alpha \in |A|$, $A \models \psi[v(x|\alpha)]$).
  - $A \models \exists x\psi[v]$ ανν (υπάρχει $\alpha \in |A|$ τέτοιο ώστε $A \models \psi[v(x|\alpha)]$).

Παραδείγματα

- Δεν ακολουθούμε τον φορμαλισμό του ορισμού Tarski, αλλά την ουσία του.
- Ελέγχουμε αν πρόταση αληθεύει σε **συγκεκριμένη** ερμηνεία.
  - Απλά «αποκωδικοποιούμε» την πρόταση (στην συγκεκριμένη ερμηνεία) και **εξηγούμε πειστικά** αν αληθεύει ή όχι.
- Αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις στη δομή των φυσικών για $c = 0$ και $P(x, y) \equiv x \leq y$; Στην δομή των ακεραίων;

  (α) $\forall x \forall y (P(x,c) \land P(c,y) \to P(x,y))$

  (β) $\forall x (P(x,c) \to x = c)$

  - (α) αληθεύει σε φυσικούς και ακέραιους, (β) μόνο σε φυσικούς.

Παραδείγματα

- Δίνεται συγκεκριμένη πρόταση και ζητείται δομή που να (μην) την ικανοποιεί.
  - Δομή που ικανοποιεί παρακάτω προτάσεις ταυτόχρονα:

    $$\forall x[Q(c,x) \to \exists y(x = f(y))] \qquad \neg\exists x(f(x) = c)$$

    - Δοκιμάζουμε φυσικούς, με c = 0, Q(x, y) ≡ x < y, και f(x) = x+1.

    $$\forall x[x > 0 \to \exists y(y = x - 1)] \qquad \neg\exists x(x + 1 = 0)$$

  - Νδο παρακάτω πρόταση δεν είναι λογικά έγκυρη περιγράφοντας ερμηνεία της Γλώσσας Θ. Αριθμών που δεν την ικανοποιεί.

    $$\forall x\exists y Q(x,y) \to \exists y\forall x Q(x,y)$$

    - Αν Q(x, y) ≡ x < y, υπόθεση αληθής και συμπέρασμα ψευδές!

Παραδείγματα

- Συνολοθεωρητική ερμηνεία με κατηγορηματικό συμβολο Q(x, y) που αληθεύει ανν $x \in y$ (δηλ. το σύνολο y περιέχει ως στοιχείο το σύνολο x).
- Να ορίσετε το σύμπαν |A| ώστε να αληθεύει η 1η από τις παρακάτω προτάσεις και να μην αληθεύει η 2η.

  $\exists y \forall x \neg Q(x,y)$ $\qquad$ $\forall x \forall y [x = y \leftrightarrow \forall z (Q(z,x) \leftrightarrow Q(z,y))]$

  - Για να αληθεύει η 1η, αρκεί να υπάρχει στο σύμπαν σύνολο που δεν περιέχει (ως στοιχείο) κανένα σύνολο που **ανήκει** στο σύμπαν.
    - Αυτό αληθεύει αν π.χ. $\varnothing \in |A|$.
  - Για να μην αληθεύει η 2η, αρκεί να υπάρχουν στο σύμπαν δύο διαφορετικά σύνολα που να περιέχουν (ως στοιχεία) τα ίδια ακριβώς σύνολα του σύμπαντος.
    - Π.χ. $|A| = \{ \varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \}$

Παραδείγματα

- Ελάχιστο και μέγιστο πλήθος στοιχείων μιας δομής που αποτελεί μοντέλο για τις παρακάτω προτάσεις:
  - $\exists x \exists y (x \neq y)$ $|A| \geq 2$
  - $\forall x \forall y (x = y)$ $|A| = 1$
  - $\forall x \exists y \exists z \exists w (x \neq y \wedge x \neq z \wedge x \neq w)$ $|A| \geq 2$
  - $\exists y \exists z \exists w (y \neq z \wedge z \neq w \wedge y \neq w)$ $|A| \geq 3$
  - $\forall x \forall y \forall w (x = y \vee y = w \vee x = w)$ $|A| \in \{1, 2\}$

Λογική Εγκυρότητα

- Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι λογικά έγκυρες:

$$\text{(i) } \exists x P(x) \lor \exists y Q(y) \to \exists x (P(x) \land Q(x))$$

$$\text{(ii) } \forall x (P(x) \land Q(x)) \to \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

- Ότι μια πρόταση δεν είναι λογικά έγκυρη αποδεικνύεται με «αντιπαράδειγμα» (ερμηνεία που δεν την ικανοποιεί):
  - Για την (i), φυσικοί αριθμοί, P(x) δηλώνει ότι x άρτιος, Q(x) δηλώνει ότι x περιττός.
- Λογική εγκυρότητα αποδεικνύεται με εφαρμογή ορισμού Tarski.
  - Για αυθαίρετη ερμηνεία A, πρόταση (ii) δηλώνει ότι:
    αν για κάθε στοιχείο α ∈ |A|, A |= P(α) και A |= Q(α),
    τότε για κάθε στοιχείο α ∈ |A|, A |= P(α) ή A |= Q(α).
  - Αυτό αληθεύει για κάθε δομή A.

Λογική Εγκυρότητα

- Νδο $|= \varphi(c) \rightarrow \exists x \varphi(x)$
  - Θεωρούμε αυθαίρετη δομή A. $A |= \varphi(c) \rightarrow \exists x \varphi(x)$ ...
  - ... ανν όταν $A |= \varphi(c)$, υπάρχει $\alpha \in |A|$ τ.ω. $A |= \varphi(\alpha)$.
  - Ισχύει, αφού φ αληθεύει για στοιχείο όπου έχει αποτιμηθεί c.
- Νδο $|= \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$
  - Έστω αυθαίρετη δομή A. $A |= \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$ ...
  - ανν όταν (i) υπάρχει $\alpha \in |A|$ τ.ω. για κάθε $\beta \in |A|$, $A |= P(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$, τότε (ii) για κάθε $\gamma \in |A|$, υπάρχει $\delta \in |A|$ τ.ω. $A |= P(\delta, \gamma)$.
  - Ισχύει, αφού για κάθε $\gamma \in |A|$, $A |= P(\boldsymbol{\alpha}, \gamma)$ λόγω υπόθεσης.

Λογική Εγκυρότητα

- Νδο $\models \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$
  - Θεωρούμε αυθαίρετη δομή A. Πρέπει νδο:
    - Αν (i) υπάρχει $\alpha \in |A|$: $A \models P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)$, τότε (ii) αν για κάθε $\beta \in |A|$, $A \models P(\beta)$, τότε (iii) υπάρχει $\gamma \in |A|$: $A \models Q(\gamma)$.
  - Αρκεί νδο αν ισχύουν τα (i) και (ii), τότε ισχύει και το (iii).
  - Λόγω (i): υπάρχει $\alpha \in |A|$: $A \models P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)$.
  - Λόγω (ii): $A \models P(\alpha)$.
  - Άρα $A \models Q(\alpha)$.
  - Συνεπώς, αν ισχύουν τα (i) και (ii), υπάρχει στοιχείο του $|A|$ για το οποίο αληθεύει το Q στην ερμηνεία A.

Λογική Συνεπαγωγή

- Έστω οι τύποι (1) $\forall x(f(x) = x \leftrightarrow Q(x))$, και
  (2) $\forall x(f(x) = x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$.
  (α) Να βρείτε ποιος τύπος συνεπάγεται λογικά τον άλλο, και
  (β) νδο οι τύποι δεν είναι λογικά ισοδύναμοι.
  - Θδο (1) |= (2) (αλλά όχι το αντίστροφο).
  - Έστω αυθαίρετη ερμηνεία A. Από ορισμό Tarksi, αρκεί νδο:
    - Αν (i) για κάθε $\alpha \in |A|$, $A \models f(\alpha) = \alpha$ ανν $A \models Q(\alpha)$,
      τότε (ii.1) για κάθε $\beta \in |A|$, $A \models f(\beta) = \beta$ ανν
      (ii.2) για κάθε $\gamma \in |A|$, $A \models Q(\gamma)$.
  - Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:
    - Ισχύει (ii.2), δηλ. για κάθε $\gamma \in |A|$, $A \models Q(\gamma)$ ανν,
      λογω (i), για κάθε $\beta \in |A|$, $A \models f(\beta) = \beta$, ανν ισχύει (ii.1).
    - Δεν ισχύει (ii.2), δηλ. υπάρχει $\delta \in |A|$, $A \models \neg Q(\delta)$, ανν,
      λόγω (i), υπάρχει $\delta \in |A|$, $A \models f(\delta) \neq \delta$, ανν δεν ισχύει (ii.2).

Λογική Συνεπαγωγή

- Έστω οι τύποι (1) $\forall x(f(x) = x \leftrightarrow Q(x))$, και
  (2) $\forall x(f(x) = x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$.
  (α) Να βρείτε ποιος τύπος συνεπάγεται λογικά τον άλλο, και
  (β) νδο οι τύποι δεν είναι λογικά ισοδύναμοι.
  - Ερμηνεία A που επαληθεύει τον (2) αλλά όχι τον (1).
  - $|A| = \{α, β\}$, $f(α) = α$, $f(β) = α$, και $Q(α)$ Ψ, $Q(β)$ Α.
  - A μοντέλο για τον (2):
    - $A \models \neg\forall x(f(x) = x)$ και $A \models \neg\forall x Q(x)$
  - A όχι μοντέλο για τον (1):
    - Υπάρχει στοιχείο του $|A|$, το α, για το οποίο $f(α) = α$ αλλά $Q(α)$ δεν αληθεύει.

Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

- Για κάθε τύπο φ, μπορούμε να βρούμε λογικά ισοδύναμο τύπο $\varphi^* \equiv Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, \varphi'(x_1, \ldots, x_n)$ όπου Q_i ποσοδείκτες και $\varphi'(x_1, \ldots, x_n)$ ανοικτός τύπος.
  - φ^* αποτελεί **Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή** (ΚΠΜ) φ.
- Για υπολογισμό ΚΠΜ, χρησιμοποιούμε:
  - Νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών (μόνο αν x **δεν** εμφανίζεται ελεύθερη στον φ):

$$\forall x \psi(x) \rightarrow \varphi \equiv \exists x (\psi(x) \rightarrow \varphi)$$
$$\exists x \psi(x) \rightarrow \varphi \equiv \forall x (\psi(x) \rightarrow \varphi)$$
$$\varphi \rightarrow \forall x \psi(x) \equiv \forall x (\varphi \rightarrow \psi(x))$$
$$\varphi \rightarrow \exists x \psi(x) \equiv \exists x (\varphi \rightarrow \psi(x))$$

  - Νόμους άρνησης ποσοδεικτών:

$$\neg \exists x \varphi(x) \equiv \forall x \neg \varphi(x)$$
$$\neg \forall x \varphi(x) \equiv \exists x \neg \varphi(x)$$

  - Νόμους κατανομής ποσοδεικτών:

$$\forall x (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x)$$
$$\exists x (\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x)$$

Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

- Να βρείτε μια ΚΠΜ του τύπου

$$\forall x(P(x,y) \to \neg\exists z Q(x,z)) \to (\forall x R(x) \wedge \forall y S(y))$$
$$\equiv \forall x(P(x,y) \to \neg\exists z Q(x,z)) \to \forall w(R(w) \wedge S(w))$$
$$\equiv \forall w[\forall x(P(x,y) \to \neg\exists z Q(x,z)) \to (R(w) \wedge S(w))]$$
$$\equiv \forall w[\forall x(P(x,y) \to \forall z \neg Q(x,z)) \to (R(w) \wedge S(w))]$$
$$\equiv \forall w \exists x[(P(x,y) \to \forall z \neg Q(x,z)) \to (R(w) \wedge S(w))]$$
$$\equiv \forall w \exists x[\forall z(P(x,y) \to \neg Q(x,z)) \to (R(w) \wedge S(w))]$$
$$\equiv \forall w \exists x \exists z[(P(x,y) \to \neg Q(x,z)) \to (R(w) \wedge S(w))]$$