Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτάκης

5η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων, Σχέδιο Λύσεων

Άσκηση 1 (Κατηγορηματική Λογική). (α) Έστω $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, και έστω $\mathcal{P}(S_n)$ το δυναμοσύνολο του S_n. Για κάθε φυσικό m, $0 \leq m \leq n$, συμβολίζουμε με E_m το υποσύνολο του $\mathcal{P}(S_n)$ που αποτελείται από τα υποσύνολα του S_n με πληθικό αριθμό m. Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα με διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q, την οποία ερμηνεύουμε στο $\mathcal{P}(S_n)$ με το $Q(x, y)$ να αληθεύει ανν $x \subseteq y$ (δεν υπάρχει στη γλώσσα μας άλλο κατηγορηματικό σύμβολο, συναρτησιακό σύμβολο, ή σύμβολο σταθεράς). Σε αυτή την ερμηνεία, να διατυπώσετε:

1. Τύπο $\varphi_1(x)$ που αληθεύει ανν $x \notin E_0$.
2. Τύπο $\varphi_2(x)$ που αληθεύει ανν $x \in E_{n-1}$.
3. Τύπο $\varphi_3(x)$ που αληθεύει ανν το x έχει τουλάχιστον 2 γνήσια υποσύνολα στο $\mathcal{P}(S_n)$.
4. Τύπο $\varphi_4(x)$ που αληθεύει ανν το x έχει (ακριβώς) 2 υποσύνολα στο $\mathcal{P}(S_n)$.
5. Τύπο $\varphi_5(x, y)$ που αληθεύει ανν τα x και y αποτελούν μια διαμέριση του S_n.
6. Τύπο $\varphi_6(x, y, z)$ που αληθεύει ανν το σύνολο x αποτελεί την ένωση των συνόλων y και z.
7. Πρόταση που δηλώνει την ύπαρξη μοναδικού συνόλου που είναι υπερσύνολο όλων των συνόλων στο $\mathcal{P}(S_n)$.

Λύση. (α.1) Το E_0 περιλαμβάνει μόνο το κενό σύνολο. Άρα ο $\varphi_1(x)$ πρέπει να αληθεύει ανν $x \neq \emptyset$, δηλ. ανν το x έχει υποσύνολο διαφορετικό από τον εαυτό του. Συνεπώς:

$$\varphi_1(x) \equiv \exists y (x \neq y \wedge Q(y, x))$$

(α.2) Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του E_{n-1} χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι έχουν ένα και μοναδικό γνήσιο υπερσύνολο, το S_n. Άρα:

$$\varphi_2(x) \equiv \exists y [x \neq y \wedge Q(x, y) \wedge \forall z (Q(x, z) \rightarrow (x = z \vee y = z))]$$

(α.3) $\varphi_3(x) \equiv \exists y \exists z [y \neq z \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge Q(y, x) \wedge Q(z, x)]$
(α.4) $\varphi_4(x) \equiv \exists y \exists z [y \neq z \wedge Q(y, x) \wedge Q(z, x) \wedge \forall w (Q(w, x) \rightarrow (w = y \vee w = z))]$
(α.5) Ένας τρόπος να εκφράσουμε ότι τα x και y αποτελούν διαμέριση του S_n είναι να δηλώσουμε ότι αμφότερα είναι διαφορετικά από το κενό σύνολο και ότι κάθε μονοσύνολο $z \in E_1$, είναι υποσύνολο είτε του x είτε του y, αλλά όχι και των δύο. Για να εξασφαλίσουμε ότι τα x και y είναι διαφορετικά από το κενό σύνολο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο φ_1. Για να εκφράσουμε την δεύτερη συνθήκη, διατυπώνουμε πρώτα τύπο $\psi(z)$ που αληθεύει ανν $z \in E_1$:

$$\psi(z) \equiv \exists w [w \neq z \wedge Q(w, z) \wedge \forall v (Q(v, z) \rightarrow (v = z \vee v = w))]$$

Με βάση το παραπάνω σκεπτικό, έχουμε:

$$\varphi_5(x, y) \equiv \varphi_1(x) \wedge \varphi_1(y) \wedge \forall z [\psi(z) \rightarrow (Q(z, x) \leftrightarrow \neg Q(z, y))]$$

(α.6) $\varphi_6(x, y, z) \equiv Q(y, x) \wedge Q(z, x) \wedge \forall w (Q(y, w) \wedge Q(z, w) \rightarrow Q(x, w))$
(α.7) $\exists x [\forall y Q(y, x) \wedge \forall z (\forall y Q(y, z) \rightarrow x = z)]$ $\square$

Άσκηση 2 (Κατηγορηματική Λογική). (α) Δίνονται οι προτάσεις φ και ψ:

$$\varphi \equiv \forall x(Q(x) \vee P(x)) \rightarrow (\exists x Q(x) \vee \forall x P(x))$$
$$\psi \equiv (\exists x Q(x) \vee \forall x P(x)) \rightarrow \forall x(Q(x) \vee P(x))\,,$$

όπου $Q(x)$ και $P(x)$ μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα. Να εξετάσετε τις προτάσεις φ και ψ ως προς την λογική τους εγκυρότητα. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τους ισχυρισμούς σας.

(β) Έστω $\psi(x)$ τύπος με μία ελεύθερη μεταβλητή x, και φ πρόταση. Να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη:

$$(\exists x \psi(x) \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi)$$

Λύση. (α) Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η ψ δεν είναι λογικά έγκυρη, παρουσιάζοντας ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο για την ψ. Στη δομή των φυσικών αριθμών, έστω ότι το $Q(x)$ αληθεύει ανν $x = 0$, και το $P(x)$ αληθεύει ανν ο x είναι άρτιος. Τότε στην πρόταση ψ, η υπόθεση $\exists x Q(x) \vee \forall x P(x)$ αληθεύει, αφού δηλώνει ότι "υπάρχει φυσικός που ισούται με το 0 ή κάθε φυσικός είναι άρτιος", ενώ το συμπέρασμα $\forall x(Q(x) \vee P(x))$, δεν αληθεύει, αφού δηλώνει ότι "κάθε φυσικός ισούται με το 0 ή είναι άρτιος".

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η φ είναι λογικά έγκυρη. Θεωρούμε μια αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ με σύμπαν το A. Υποθέτουμε ότι αληθεύει η υπόθεση της φ στην $\mathcal{A}$, δηλ. ότι για κάθε $\alpha \in A$, $\mathcal{A} \models Q(\alpha)$ ή $\mathcal{A} \models P(\alpha)$. Θα δείξουμε ότι αληθεύει και το συμπέρασμα, δηλαδή ότι $\mathcal{A} \models \exists x Q(x) \vee \forall x P(x)$. Πράγματι, αν υπάρχει στοιχείο $\beta \in A$ τέτοιο ώστε να αληθεύει το $Q(\beta)$, τότε $\mathcal{A} \models \exists x Q(x)$, και το συμπέρασμα της φ αληθεύει. Αν δεν υπάρχει κανένα $\beta \in A$ για το οποίο αληθεύει το $Q(\beta)$, ο μοναδικός τρόπος να αληθεύει η υπόθεση της φ είναι να ισχύει ότι για κάθε $\beta \in A$, $\mathcal{A} \models P(\beta)$. Άρα $\mathcal{A} \models \forall x P(x)$, οπότε το συμπέρασμα της φ αληθεύει και σε αυτή την περίπτωση.

(β) Έστω αυθαίρετα επιλεγμένη ερμηνεία $\mathcal{A}$ με σύμπαν το A. Πρέπει να δείξουμε ότι οι (1) και (2) είναι ισοδύναμες:

$$\mathcal{A} \models \exists x \psi(x) \rightarrow \varphi \tag{1}$$

$$\mathcal{A} \models \forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi) \tag{2}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι η (1) συνεπάγεται λογικά την (2). Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, η (1) αληθεύει ανν

$$\text{αν } \mathcal{A} \models \exists x \psi(x)\,,\ \text{τότε } \mathcal{A} \models \varphi$$

Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \psi(\alpha)$. Αφού η (1) είναι αληθής, $\mathcal{A} \models \varphi$. Επομένως, η (2) αληθεύει στην $\mathcal{A}$, αφού για κάθε $\beta \in A$, το συμπέρασμα της συνεπαγωγής $\psi(\beta) \rightarrow \varphi$ είναι αληθές. Αν δεν υπάρχει $\alpha \in A$ για το οποίο το $\psi(\alpha)$ αληθεύει στην $\mathcal{A}$, για κάθε στοιχείο $\beta \in A$, η υπόθεση της συνεπαγωγής $\psi(\beta) \rightarrow \varphi$ είναι ψευδής. Άρα για κάθε $\beta \in A$, η συνεπαγωγή $\psi(\beta) \rightarrow \varphi$ είναι αληθής. Επομένως, η (2) αληθεύει στην $\mathcal{A}$.

Πρέπει να δείξουμε και το αντίστροφο, δηλαδή ότι η (2) συνεπάγεται λογικά την (1). Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, η (2) αληθεύει ανν

$$\text{για κάθε } \alpha \in A \ (\text{αν } \mathcal{A} \models \psi(\alpha)\,,\ \text{τότε } \mathcal{A} \models \varphi)$$

Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \psi(\alpha)$. Αφού η συνεπαγωγή $\psi(\alpha) \rightarrow \varphi$ αληθεύει, $\mathcal{A} \models \varphi$. Επομένως, η (1) αληθεύει στην $\mathcal{A}$, αφού πρόκειται για συνεπαγωγή με αληθές συμπέρασμα. Αν δεν υπάρχει $\alpha \in A$ για το οποίο το $\psi(\alpha)$ αληθεύει, η (1) αληθεύει γιατί η υπόθεση της (δηλ. ο υποτύπος $\exists x \psi(x)$) είναι ψευδής. $\square$

Άσκηση 3 (Κατηγορηματική Λογική και Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω η πρόταση:

$$\varphi \equiv [\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))] \rightarrow \exists y \forall x P(y,x)$$

1. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της φ.
2. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της φ.

Λύση. (1) Έστω ερμηνεία $\mathcal{A}$ με πεπερασμένο (μη-κενό) σύμπαν A. Παρατηρούμε ότι λόγω της υπόθεσης, η πρόταση φ αφορά σε σχέσεις P με τις παρακάτω ιδιότητες: (i) ανακλαστική ιδιότητα, $\forall x P(x,x)$, (ii) μεταβατική ιδιότητα, $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$, και (iii) ότι για κάθε ζεύγος στοιχείων, κάποιο σχετίζεται με το άλλο, $\forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$ (στην συνέχεια, θα αναφερόμαστε σε αυτή την ιδιότητα ως Ιδ3, χάριν συντομίας). Αν η σχέση P δεν έχει κάποια από τις παραπάνω ιδιότητες στην $\mathcal{A}$, τότε η φ αληθεύει τετριμμένα, ως συνεπαγωγή με ψευδή υπόθεση. Αν η σχέση P έχει τις τρεις παραπάνω ιδιότητες, τότε η φ αληθεύει ανν υπάρχει στοιχείο του A που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.

Η απόδειξη είναι με επαγωγή στον αριθμό των στοιχείων του $|A|$. Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, εστιάζουμε στην περίπτωση που η P έχει τις τρεις παραπάνω ιδιότητες στην $\mathcal{A}$.
Βάση της επαγωγής: Έστω $|A| = 1$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ στο A. Αν η P είναι ανακλαστική, το μοναδικό στοιχείο του σύμπαντος P-σχετίζεται με τον εαυτό του. Διαφορετικά, η φ αληθεύει γιατί έχει ψευδή υπόθεση. Άρα η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}$.
Επαγωγική Υπόθεση: Για αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό $n \geq 1$, θεωρούμε σύμπαν $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ στο A, και υποθέτουμε ότι η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι αν η P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3 στην $\mathcal{A}$, τότε υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.
Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε σύμπαν $A' = A \cup \{\alpha_{n+1}\}$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}'$ στο A'. Θα δείξουμε ότι η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3 στην $\mathcal{A}'$ (διαφορετικά η φ αληθεύει επειδή έχει ψευδή υπόθεση). Παρατηρούμε ότι η P διατηρεί αυτές τις ιδιότητες αν περιορίσουμε την ερμηνεία $\mathcal{A}'$ στο A (δηλ. αν αγνοήσουμε προσωρινά το στοιχείο α_{n+1}). Συνεπώς, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.

Για να εξετάσουμε την τιμή αλήθειας της φ στην $\mathcal{A}'$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Αν το $P(\alpha, \alpha_{n+1})$ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$, τότε το στοιχείο α P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A', και η φ αληθεύει. Αν το $P(\alpha, \alpha_{n+1})$ δεν αληθεύει, πρέπει λόγω της Ιδ3, να αληθεύει ότι $P(\alpha_{n+1}, \alpha)$. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, το στοιχείο α P-σχετίζεται με κάθε στοιχείο $\alpha_i \in A$. Άρα, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας, το στοιχείο α_{n+1} P-σχετίζεται με κάθε στοιχείο $\alpha_i \in A$. Επιπλέον, λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας, το α_{n+1} P-σχετίζεται με τον εαυτό του. Άρα το στοιχείο α_{n+1} P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A', και η φ αληθεύει. Συνεπώς η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$.

(2) Εφόσον όλες οι ερμηνείες με πεπερασμένο σύμπαν είναι μοντέλα της φ, πρέπει να εξετάσουμε ερμηνείες με άπειρο σύμπαν. Έστω ότι το σύμπαν είναι οι φυσικοί αριθμοί και ότι το κατηγορηματικό σύμβολο P ερμηνεύεται με την σχέση "μεγαλύτερο ή ίσο" (δηλ. το $P(x,y)$ αληθεύει ανν $x \geq y$). Σε αυτή την ερμηνεία, η σχέση P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3. Όμως, δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος ή ίσος όλων των φυσικών (το σύνολο των φυσικών αριθμών εκτείνεται στο άπειρο, δεν είναι φραγμένο άνω). Επομένως η φ δεν αληθεύει σε αυτή την ερμηνεία. □