Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτάκης

4η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων, Σχέδιο Λύσεων

Άσκηση 1 (Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες). Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ μια ακολουθία από n^2+1 διαφορετικούς ακεραίους. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από n^2+1 διατεταγμένα ζεύγη ακεραίων της μορφής (a_k, k), $k \in \{1, \ldots, n^2+1\}$, και ορίζουμε μια διμελή σχέση R στο A τέτοια ώστε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ αν και μόνο αν $a_k \leq a_\ell$ *και* $k \leq \ell$ (όπου $\leq$ η συνήθης διάταξη των αριθμών).

1. Να δείξετε ότι η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.
2. Ποια είναι η σημασία μιας αλυσίδας και μιας αντιαλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R);
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n+1$.

Λύση. (1) Η σχέση R είναι *ανακλαστική* γιατί για κάθε $k \in \{1, \ldots, n^2+1\}$, $a_k \leq a_k$ και $k \leq k$, άρα $((a_k, k), (a_k, k)) \in R$. Η σχέση R είναι *μεταβατική* γιατί για κάθε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)), ((a_\ell, \ell), (a_j, j)) \in R$, έχουμε ότι $a_k \leq a_\ell \leq a_j$ και ότι $k \leq \ell \leq j$, και συνεπώς $((a_k, k), (a_j, j)) \in R$. Η σχέση R είναι *αντισυμμετρική* γιατί για κάθε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ με $k \neq \ell$, έχουμε ότι $((a_\ell, \ell), (a_k, k)) \notin R$, γιατί $\ell > k$. Άρα η σχέση R είναι σχέση μερικής διάταξης.
(2) Κάθε αλυσίδα μήκους m της R αντιστοιχεί σε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$, και αντίστροφα. Πράγματι, τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \ldots, (a_{k_m}, k_m)$ αποτελούν μια αλυσίδα μήκους m της R ανν (λόγω του ορισμού της R) $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ και $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \cdots \leq a_{k_m}$ ανν η ακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}$ αποτελεί μια αύξουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$.

Κάθε αντιαλυσίδα μεγέθους m της R αντιστοιχεί σε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$, και αντίστροφα. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι αν τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \ldots, (a_{k_m}, k_m)$ αποτελούν μια αντιαλυσίδα της R, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ (δηλ. απαριθμούμε τα στοιχεία της αντιαλυσίδας σε αύξουσα σειρά των δεικτών τους). Επομένως τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \ldots, (a_{k_m}, k_m)$, $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$, αποτελούν μια αντιαλυσίδα μεγέθους m της R ανν $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ και (λόγω του ορισμού της R) $a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_m}$ ανν η ακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}$ αποτελεί μια φθίνουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$.
(3) Αποτελεί άμεση συνέπεια του (2) και του ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R) είτε περιέχει μια αλυσίδα μήκους n είτε περιέχει μια αντιαλυσίδα μεγέθους n. □

Άσκηση 2 (Προτασιακή Λογική). (α) Σε ένα απομονωμένο νησί υπάρχουν μόνο δύο κοινωνικές τάξεις: οι ευγενείς, που λένε πάντα την αλήθεια, και οι ψευτοευγενείς, που λένε πάντα ψέματα. Δύο κάτοικοι του νησιού, ο X και ο Y δηλώνουν: ο X ότι "ο Y είναι ευγενής", και ο Y ότι "δεν ανήκω στην ίδια τάξη με τον X". Είναι κάποιος από τους X και Y ευγενής, και αν ναι, ποιος;

(β) Ένας εξερευνητής συλλαμβάνεται από μια φυλή κανιβάλων. Στη φυλή υπάρχουν δύο κατηγορίες κανιβάλων, αυτοί που λένε πάντα την αλήθεια και αυτοί που λένε πάντα ψέματα. Ο εξερευνητής θα μείνει ελεύθερος μόνο αν διαπιστώσει σε ποιά κατηγορία ανήκει ο φύλαρχος. Ο εξερευνητής μπορεί να κάνει μία μόνο ερώτηση στον φύλαρχο, την οποία αυτός θα απαντήσει με ένα "ναι" ή ένα "όχι". (i) Να εξηγήσετε γιατί η ερώτηση "Είσαι ειλικρινής;" δεν εξυπηρετεί τον σκοπό του εξερευνητή. (ii) Να βρείτε ερώτηση με την οποία ο εξερευνητής διαπιστώνει αν ο φύλαρχος είναι ειλικρινής.

(γ) Μια συγκεκριμένη χώρα κατοικείται μόνο από ανθρώπους που είτε λένε πάντα αλήθεια είτε λένε πάντα ψέματα, και απαντούν σε ερωτήσεις μόνο με ένα "ναι" ή ένα "όχι". Ένας τουρίστας φθάνει σε μια διακλάδωση του δρόμου, όπου το ένα παρακλάδι οδηγεί στην πρωτεύουσα και το άλλο όχι. Δεν υπάρχει πινακίδα που να υποδεικνύει ποιο παρακλάδι να ακολουθήσει, αλλά υπάρχει ένας κάτοικος, ο κύριος Z, ο οποίος στέκεται στη διακλάδωση. Ποια ερώτηση πρέπει να κάνει ο τουρίστας στον κύριο Z για να αποφασίσει ποιο παρακλάδι πρέπει να ακολουθήσει;

Λύση. (α) Έστω p προτασιακή μεταβλητή που δηλώνει ότι "ο X είναι ευγενής" (και άρα λέει την αλήθεια), και q προτασιακή μεταβλητή που δηλώνει ότι "ο Y είναι ευγενής" (και άρα λέει την αλήθεια). Με βάση αυτή την κωδικοποίηση, ο X δηλώνει q, και ο Y δηλώνει $q \leftrightarrow \neg p$. Η δήλωση του X αληθεύει ανν ο X είναι ευγενής, άρα πρέπει να αληθεύει ότι $p \leftrightarrow q$. Ομοίως, η δήλωση του Y αληθεύει ανν ο Y είναι ευγενής, άρα πρέπει να αληθεύει ότι $q \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$. Τελικά πρέπει να αληθεύει ο προτασιακός τύπος $\varphi \equiv (p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg p))$. Παρατηρούμε ότι ο φ αληθεύει ανν αμφότερες οι προτασιακές μεταβλητές p και q είναι Ψ. Άρα κανένας από τους X και Y δεν είναι ευγενής.

Εναλλακτικά, μπορούμε να διακρίνουμε περιπτώσεις σε σχέση με το αν ο X είναι ευγενής ή όχι. Αν ο X είναι ευγενής, τότε λέει την αλήθεια, άρα και ο Y είναι ευγενής. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την δήλωση του Y, που οφείλει να είναι αληθής (αφού ο Y είναι ευγενής). Αν ο X δεν είναι ευγενής, τότε λέει ψέματα, άρα ούτε ο Y είναι ευγενής. Άρα η δήλωση του Y είναι ψευδής, το οποίο είναι συμβατό με την υπόθεση ότι κανένας από τους X και Y δεν είναι ευγενής.

(β) Στην ερώτηση "Είσαι ειλικρινής;", ο φύλαρχος απαντά πάντα "ναι" (αν πράγματι είναι ειλικρινής, γιατί λέει την αλήθεια, αν όχι, γιατί λέει ψέματα). Αντίθετα, αν η ερώτηση του εξερευνητή αφορά κάτι που είναι ταυτολογικά αληθές (π.χ. "Είναι αλήθεια ότι είσαι ο φύλαρχος;", "Είναι αλήθεια ότι με έχετε συλλάβει;", κοκ.), τότε ο φύλαρχος απαντά "ναι" ανν είναι ειλικρινής.

(γ) Έστω p προτασιακή μεταβλητή που δηλώνει ότι "ο κύριος Z λέει την αλήθεια" και q προτασιακή μεταβλητή που δηλώνει ότι "το αριστερό παρακλάδι οδηγεί στην πρωτεύουσα". Θα σχηματίσουμε προτασιακό τύπο φ με τις p και q, ώστε η απάντηση του κυρίου Z στην ερώτηση "Είναι ο φ αληθής;" να είναι "ναι" ανν η q είναι αληθής.

Ειδικότερα, αν η p είναι Α, ο προτασιακός τύπος φ πρέπει να έχει την ίδια τιμή αλήθειας με την q (ώστε η απάντηση του Z, που λέει αλήθεια, να ταυτίζεται με την αληθοτιμή της q), ενώ αν η p είναι Ψ, ο φ πρέπει να έχει την ίδια τιμή αλήθειας με την $\neg q$ (ώστε η απάντηση του Z, που λέει ψέματα, να ταυτίζεται με την αληθοτιμή της q). Έτσι καταλήγουμε στον πίνακα αλήθειας του προτασιακού τύπου φ, και ότι $\varphi \equiv p \leftrightarrow q$. □

p	q	φ
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α