



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών
Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτάκης
4η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων

Άσκηση 1 (Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες). Έστω $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ μια ακολουθία από $n^2 + 1$ διαφορετικούς ακεραίους. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από $n^2 + 1$ διατεταγμένα ζεύγη ακεραίων της μορφής (a_k, k) , $k \in \{1, \dots, n^2 + 1\}$, και ορίζουμε μια διμελή σχέση R στο A τέτοια ώστε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ αν και μόνο αν $a_k \leq a_\ell$ και $k \leq \ell$ (όπου \leq η συνηθής διάταξη των αριθμών).

1. Να δείξετε ότι η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.
2. Ποια είναι η σημασία μιας αλυσίδας και μιας αντιαλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R) ;
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$ είτε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$.

Άσκηση 2 (Προτασιακή Λογική). (α) Σε ένα απομονωμένο νησί υπάρχουν μόνο δύο κοινωνικές τάξεις: οι ευγενείς, που λένε πάντα την αλήθεια, και οι ψευτοευγενείς, που λένε πάντα ψέματα. Δύο κάτοικοι του νησιού, ο X και ο Y δηλώνουν: ο X ότι “ο Y είναι ευγενής”, και ο Y ότι “δεν ανήκω στην ίδια τάξη με τον X ”. Είναι κάποιος από τους X και Y ευγενής, και αν ναι, ποιος;

(β) Ένας εξερευνητής συλλαμβάνεται από μια φυλή κανιβάλων. Στη φυλή υπάρχουν δύο κατηγορίες κανιβάλων, αυτοί που λένε πάντα την αλήθεια και αυτοί που λένε πάντα ψέματα. Ο εξερευνητής θα μείνει ελεύθερος μόνο αν διαπιστώσει σε ποιά κατηγορία ανήκει ο φύλαρχος. Ο εξερευνητής μπορεί να κάνει μία μόνο ερώτηση στον φύλαρχο, την οποία αυτός θα απαντήσει με ένα “ναι” ή ένα “όχι”. (i) Να εξηγήσετε γιατί η ερώτηση “Είσαι ειλικρινής;” δεν εξυπηρετεί τον σκοπό του εξερευνητή. (ii) Να βρείτε ερώτηση με την οποία ο εξερευνητής διαπιστώνει αν ο φύλαρχος είναι ειλικρινής.

(γ) Μια συγκεκριμένη χώρα κατοικείται μόνο από ανθρώπους που είτε λένε πάντα αλήθεια είτε λένε πάντα ψέματα, και απαντούν σε ερωτήσεις μόνο με ένα “ναι” ή ένα “όχι”. Ένας τουρίστας φθάνει σε μια διακλάδωση του δρόμου, όπου το ένα παρακλάδι οδηγεί στην πρωτεύουσα και το άλλο όχι. Δεν υπάρχει πινακίδα που να υποδεικνύει ποιο παρακλάδι να ακολουθήσει, αλλά υπάρχει ένας κάτοικος, ο κύριος Z , ο οποίος στέκεται στη διακλάδωση. Ποια ερώτηση πρέπει να κάνει ο τουρίστας στον κύριο Z για να αποφασίσει ποιο παρακλάδι πρέπει να ακολουθήσει;