Κανονικές Γλώσσες

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Κανονικές Γλώσσες

- Κανονική γλώσσα αν παράγεται από κανονική γραμματική.
- Παραγωγές $P \subseteq (V - \Sigma) \times \Sigma^*((V - \Sigma) \cup \varepsilon)$
  - Παραγωγές μορφής: $A \to w \mid wB$, $w \in \Sigma^*, A, B \in V - \Sigma$
  - Ένα μη-τερματικό αριστερά.
  - Στα δεξιά, το πολύ ένα μη-τερματικό στο τέλος.

$V = \{0, 1, A, B, S\}$,
$\Sigma = \{0, 1\}$,
S

Παραγωγές P_1
$S \to 1S \mid 0A$
$A \to 1S \mid 0B$
$B \to 1S \mid 0B \mid 0$

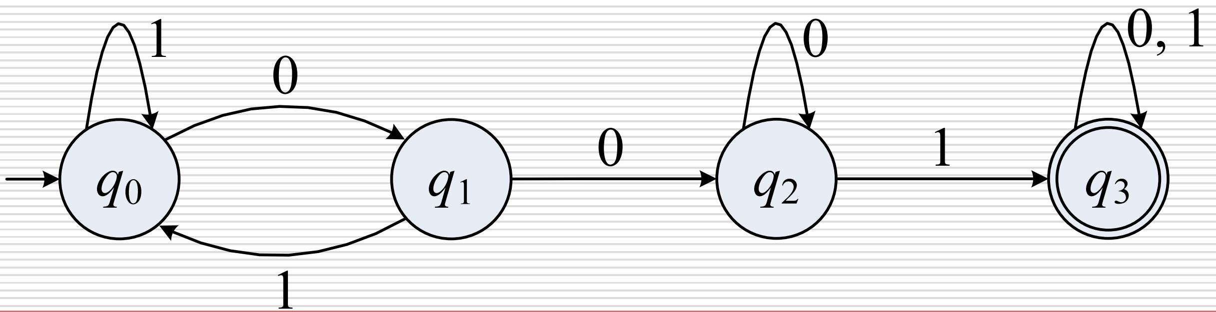
Παραγωγές P_2
$S \to 1S \mid 1 \mid 0A$
$A \to 1A \mid 0B$
$B \to 1B \mid 0S \mid 0$

$V' = \{0, 1, S\}$,
$\Sigma = \{0, 1\}$,
S

Παραγωγές P_3
$S \to 01S \mid 010S \mid \varepsilon$

Κανονικές Γλώσσες και Αυτόματα

- Αν γλώσσα αποφασίζεται από (D)FA, τότε παράγεται από κανονική γραμματική.
  - DFA M(Q, Σ, δ, s, F) και **L = L(M)**.
  - **Κανονική** γραμματική G για την L:
    - V = Q ∪ Σ (**μη-τερματικά** αντιστοιχούν σε **καταστάσεις**)
    - S = s
    - Παραγωγές $P = \{p \to \sigma q : \delta(p, \sigma) = q\} \cup \{f \to \varepsilon : f \in F\}$
  - Με επαγωγή αποδεικνύεται (εύκολα) ότι **L = L(G)**



Κανονικές Γλώσσες και Αυτόματα

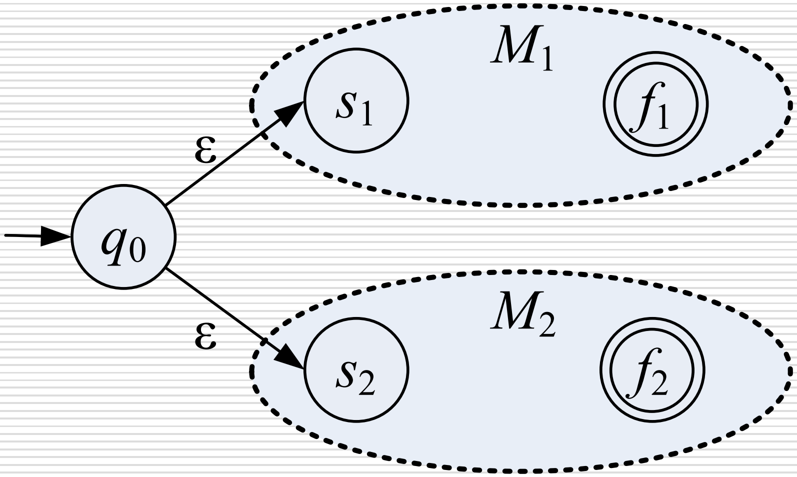
- Κάθε κανονική γλώσσα αποφασίζεται από (N)FA.
  - Κανονική γραμματική G(V, Σ, S, P) που παράγει **L = L(G)**.
    - Χ.β.γ παραγωγές $A \to \varepsilon \mid \sigma \mid \sigma B,\ \ \sigma \in \Sigma, A, B \in V - \Sigma$
  - Μη-ντετερμινιστικό αυτόματο:
    - $Q = (V - \Sigma) \cup \{f\},\ s = S,\ F = \{f\}$
    - Σχέση μετάβασης Δ: $(A, \sigma, B) \in \Delta,$ κανόνας $A \to \sigma B$

      $(A, \sigma, f) \in \Delta,$ κανόνας $A \to \sigma$

      $(A, \varepsilon, f) \in \Delta,$ κανόνας $A \to \varepsilon$
  - Με επαγωγή αποδεικνύεται (εύκολα) ότι **L = L(M)**
- Κλάση κανονικών γλωσσών ταυτίζεται με κλάση γλωσσών που αποφασίζονται από DFA (και NFA).

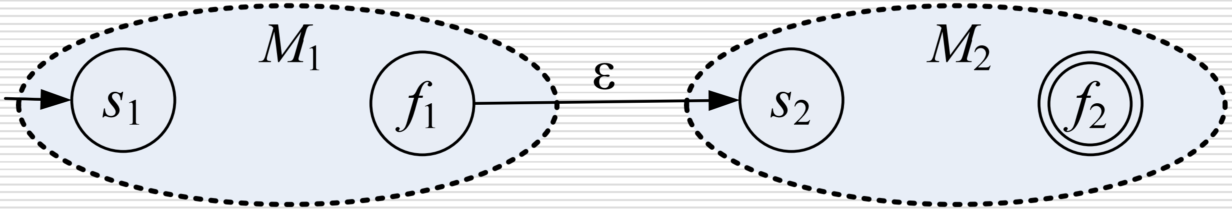
Κλειστότητα

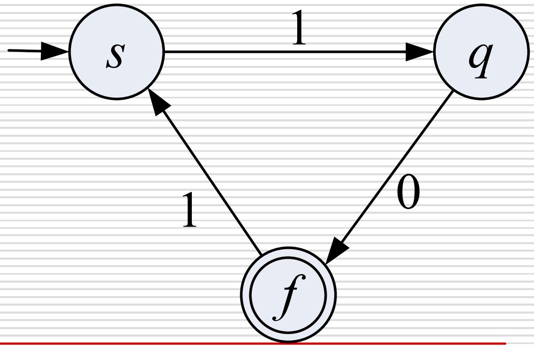
- Η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι **κλειστή** ως προς:
  - Ένωση $L_1 \cup L_2$



Κλειστότητα

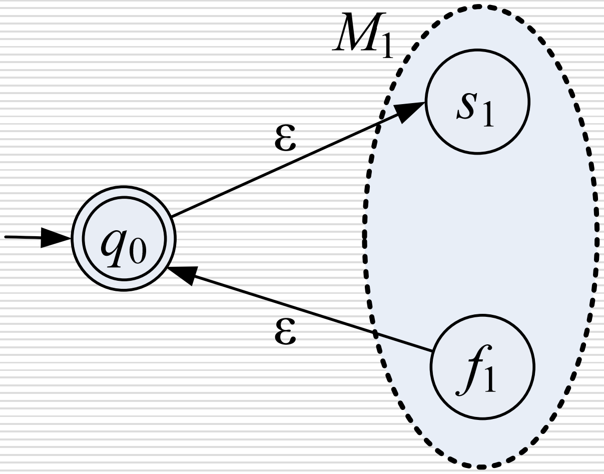
- Η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι **κλειστή** ως προς:
  - Ένωση $L_1 \cup L_2$
  - Παράθεση $L_1 L_2$





Κλειστότητα

- Η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι **κλειστή** ως προς:
  - Ένωση $L_1 \cup L_2$
  - Παράθεση $L_1 L_2$
  - Kleene star L^*



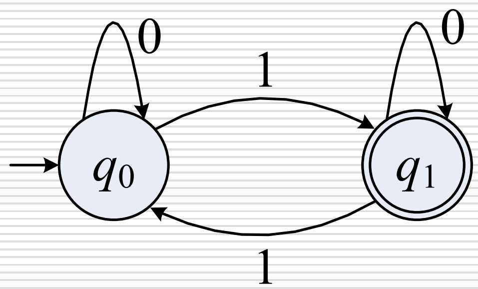
Κλειστότητα

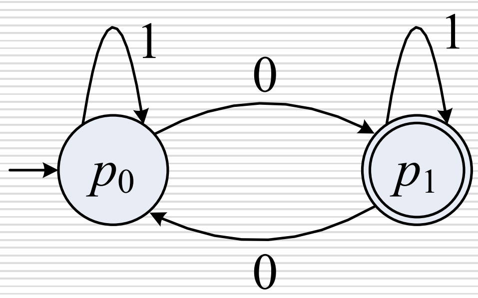
- Η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι **κλειστή** ως προς:
  - Ένωση $L_1 \cup L_2$
  - Παράθεση $L_1 L_2$
  - Kleene star L^*
  - Συμπλήρωμα
    - DFA και εναλλαγή τελικών – μη τελικών.
  - Τομή $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

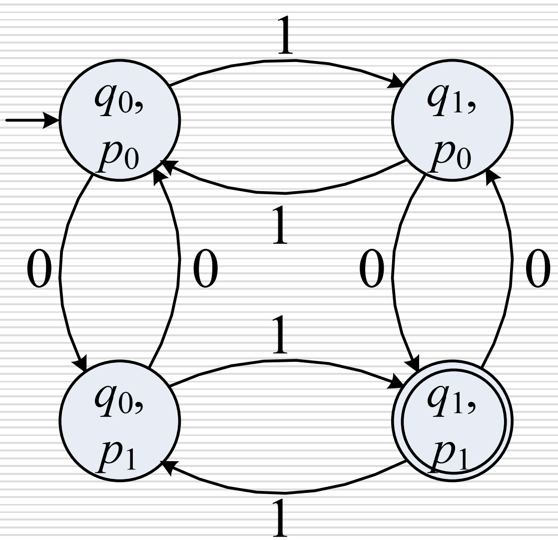
Κλειστότητα

- Η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι **κλειστή** ως προς:
  - Τομή $L_1 \cap L_2$
  - Έστω DFA $M_1(Q_1, \Sigma, \delta_2, s_1, F_1)$ με $L_1 = L(M_1)$ και DFA $M_2(Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ με $L_2 = L(M_2)$.
  - Ορίζουμε DFA $M'(Q', \Sigma, \delta', s', F')$ με $L(M') = L_1 \cap L_2$
    - Καταστάσεις $Q' = Q_1 \times Q_2$
    - Αρχική κατάσταση $s' = (s_1, s_2)$
    - Τελικές καταστάσεις $F' = \{(p, q)$: $p \in F_1$ **και** $q \in F_2\}$
    - Συνάρτηση μετάβασης $\delta((p, q), \sigma) = (\delta_1(p, \sigma), \delta_2(q, \sigma))$
  - Διαφορά $L(M_1) - L(M_2)$
    - Μόνη αλλαγή: Τελικές $= \{(p, q)$: $p \in F_1$ **και** $q \notin F_2\}$

Παράδειγμα







Κανονικές Εκφράσεις

- Κανονική έκφραση αλφάβητου Σ :
  1. Το $\varnothing$ και κάθε $\sigma \in \Sigma$ είναι ΚΕ.
  2. Αν α και β είναι ΚΕ, τότε $(\alpha \cup \beta)$ είναι ΚΕ.
  3. Αν α και β είναι ΚΕ, τότε $(\alpha\,\beta)$ είναι ΚΕ.
  4. Αν α είναι ΚΕ, τότε α^* είναι ΚΕ.
  5. Τίποτα άλλο δεν είναι ΚΕ.
- Παραδείγματα ΚΕ του $\Sigma = \{0, 1\}$: (παραλείπουμε παρενθέσεις)
  - ε γιατί εκφράζεται σαν $\varnothing^*$
  - $(0 \cup 1)$, $(0 \cup 1)1^*$, $((0 \cup 1)1(0 \cup 1)0)^*$
  - $(10 \cup 01)^* \cup (0001 \cup 1000)^*$, $(1 \cup 1^*)^*$
  - $0^*10^*010^*(10^* \cup \varnothing^*)$

… και Αντίστοιχες Γλώσσες

- Αν α μια ΚΕ, $\mathcal{L}(\alpha)$ είναι η αντίστοιχη γλώσσα.
  1. $\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset, \ \mathcal{L}(\sigma) = \{\sigma\}$
  2. $\mathcal{L}((\alpha \cup \beta)) = \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{L}(\beta)$
  3. $\mathcal{L}((\alpha\beta)) = \mathcal{L}(\alpha)\mathcal{L}(\beta)$
  4. $\mathcal{L}(\alpha^*) = \mathcal{L}(\alpha)^*$
- Αναπαράσταση μιας γλώσσα με κανονική έκφραση δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδική.
  - Μια γλώσσα μπορεί να αναπαρίσταται από άπειρες κανονικές εκφράσεις.

Παραδείγματα

- Ποια γλώσσα αντιστοιχεί στην ΚΕ: $(a \cup b)^*$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}((a \cup b)^*) &= \mathcal{L}((a \cup b))^* && \text{(κανόνας 4)} \\
&= (\mathcal{L}(a) \cup \mathcal{L}(b))^* && \text{(κανόνας 2)} \\
&= (\{a\} \cup \{b\})^* && \text{(κανόνας 1)} \\
&= \{a, b\}^*
\end{aligned}$$

- Ποια γλώσσα αντιστοιχεί στην ΚΕ: $((a \cup b)^*(ba))$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(((a \cup b)^*(ba))) &= \mathcal{L}((a \cup b)^*)\mathcal{L}((ba)) && \text{(κανόνας 3)} \\
&= \mathcal{L}((a \cup b))^*(\mathcal{L}(b)\mathcal{L}(a)) && \text{(κανόνες 4 και 3)} \\
&= (\mathcal{L}(a) \cup \mathcal{L}(b))^*\{b\}\{a\} && \text{(κανόνες 2 και 1)} \\
&= \{a, b\}^*\{ba\} && \text{(κανόνας 1)}
\end{aligned}$$

Παραδείγματα

- Ποια γλώσσα αντιστοιχεί στην ΚΕ: $(a \cup (ba))^*$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}((a \cup (ba))^*) &= \mathcal{L}((a \cup (ba)))^* && \text{(κανόνας 4)}\\
&= (\mathcal{L}(a) \cup \mathcal{L}((ba)))^* && \text{(κανόνας 2)}\\
&= (\mathcal{L}(a) \cup (\mathcal{L}(b)\mathcal{L}(a)))^* && \text{(κανόνας 3)}\\
&= (\{a\} \cup (\{b\}\{a\}))^* && \text{(κανόνας 1)}\\
&= \{a, ba\}^*
\end{aligned}
$$

  - Κάθε *b* ακολουθείται από *a*
    (ή δεν περιέχει δύο συνεχόμενα *b*).
- Γλώσσα $(\varepsilon \cup 1 \cup 11)(0 \cup 01 \cup 011)^*$
  - Δεν περιέχει 111.

Παραδείγματα

- ΚΕ για $L = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ περιέχει } ba \text{ και τελειώνει σε } b\}$

  $$(a \cup b)^* ba (a \cup b)^* b$$

- ΚΕ για $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ περιέχει ζυγό αριθμό } 0\}$

  $$(1^*01^*0)^*1^* \quad \text{ή} \quad (1 \cup 01^*0)^*$$

- $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ τελειώνει με } 1 \text{ και δεν περιέχει } 00\}$

  $$(1 \cup 01)(1 \cup 01)^*$$

- ΚΕ για $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ περιέχει μία εμφάνιση του } 00\}$

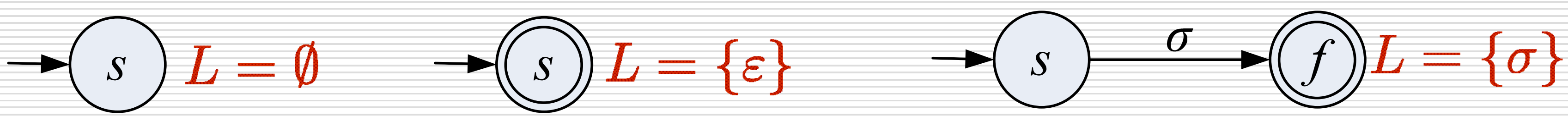
  $$(1 \cup 01)^* 00 (1 \cup 10)^*$$

- ΚΕ για $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ δεν περιέχει } 110\}$

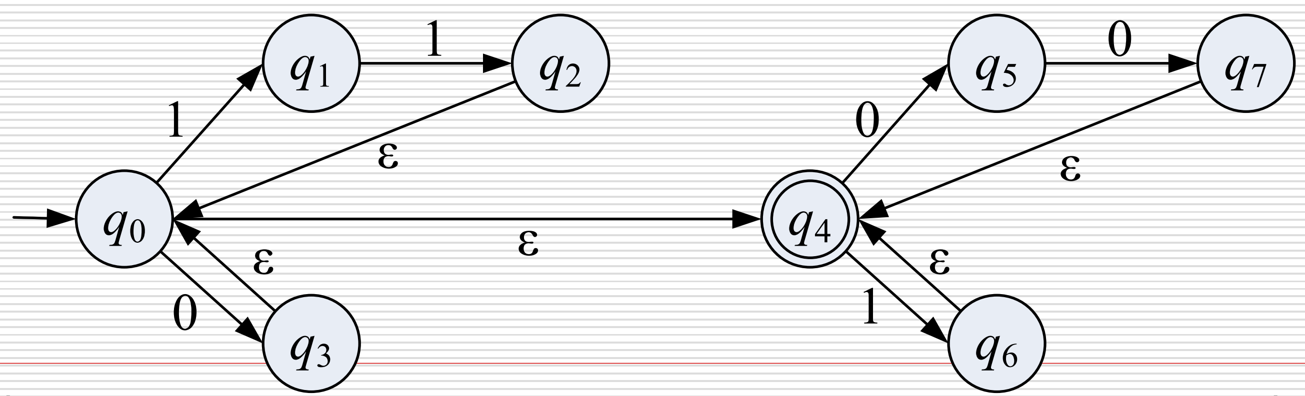
  $$(0 \cup 10)^* 1^*$$

Κανονικές Εκφράσεις και Αυτόματα

- Κάθε γλώσσα που αναπαρίσταται από κανονική έκφραση αποφασίζεται από (N)FA (και είναι κανονική).
  - Απόδειξη με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της ΚΕ.
  - Βάση: ορίζουμε (στοιχειώδη) NFA για $\emptyset$, $\{\sigma\}$, και $\{\varepsilon\}$.



  - Βήμα: για ένωση, παράθεση, * βλ. προηγούμενες κατασκευές.
  - Παράδειγμα: Γλώσσα $(11 \cup 0)^*(00 \cup 1)^*$



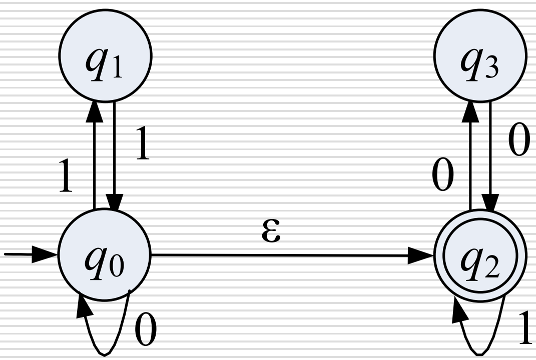
Κανονικές Εκφράσεις και Αυτόματα

- Κάθε κανονική γλώσσα (που αποφασίζεται από (D)FA) αναπαρίσταται από κανονική έκφραση.
  - Αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού (παρόμοιος με αλγόριθμο Warshall) παράγει κανονική έκφραση από περιγραφή DFA.
- Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
  - Μια γλώσσα παράγεται από κανονική γραμματική.
  - Μια γλώσσα αναπαρίσταται από κανονική έκφραση.
  - Μια γλώσσα αποφασίζεται από DFA.
  - Μια γλώσσα αποφασίζεται από NFA.

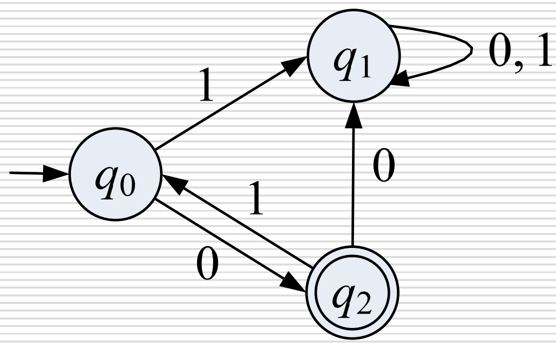
Κανονικές Εκφράσεις και Αυτόματα

- Κανονικές Εκφράσεις για γλώσσες που αναγνωρίζονται από παρακάτω αυτόματα.

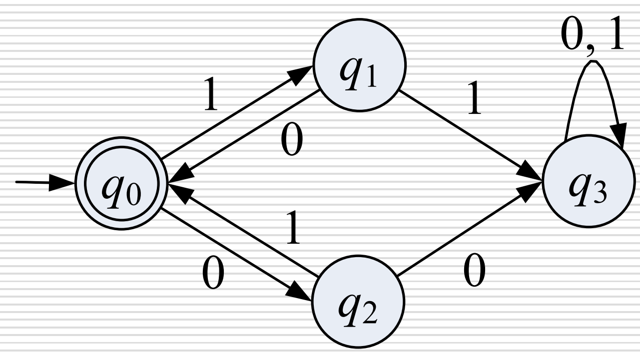
$(11 \cup 0)^*(00 \cup 1)^*$



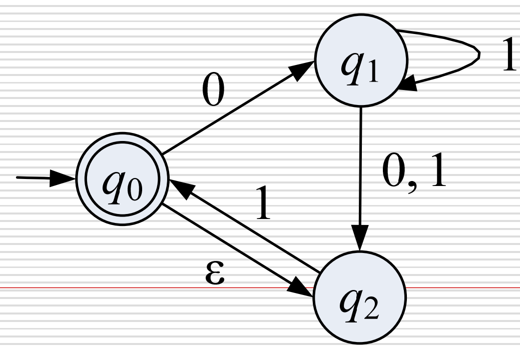
$0(10)^*$



$(10 \cup 01)^*$



$(01^*(0 \cup 1)1 \cup 1)^*$



ΚΕ και DFA

- Κάθε γλώσσα που γίνεται δεκτή από DFA αναπαρίσταται από κανονική έκφραση.
  - Έστω M(Q, Σ, δ, s, F) με Q = { q_1, …, q_n } και s = q_1
  - Θα ορίσουμε κανονική έκφραση *R*: *L*(*R*) = *L*(*M*).
  - Για κάθε *i*, *j* = 1, …, *n* και *k* = 0, …, *n*, ορίζουμε

$$R^{[k]}(i,j) = \text{σύνολο συμβ/ρών } \Sigma^* \text{ που οδηγούν } M \text{ από } q_i \text{ σε } q_j$$
$$\text{χωρίς να περάσει από ενδιάμεση κατάσταση με δείκτη} > k$$
$$\text{Αρχική } q_i \text{ και τελική } q_j \text{ μπορούν να έχουν δείκτη} > k$$

$$R^{[n]}(i,j) = \{w \in \Sigma^* : (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, \varepsilon)\}$$

$$L(M) = \bigcup \{R^{[n]}(1,j) : q_j \in F\}$$

  - Αν $R^{[k]}(i, j)$ αναπαρίστανται από κανονικές εκφράσεις, *L*(*M*) αναπαρίσταται από κανονική έκφραση (ένωση).

KE και DFA

- $R^{[k]}(i, j)$ με κανονικές εκφράσεις: επαγωγή στο k.

$$R^{[0]}(i,j) = \begin{cases} \{\sigma \in \Sigma : \delta(q_i,\sigma) = q_j\} & \text{αν } i \neq j \\ \{\varepsilon\} \cup \{\sigma \in \Sigma : \delta(q_i,\sigma) = q_i\} & \text{αν } i = j \end{cases}$$

$$R^{[k]}(i,j) = R^{[k-1]}(i,j) \cup \left(R^{[k-1]}(i,k)\ R^{[k-1]}(k,k)^*\ R^{[k-1]}(k,j)\right)$$

  - Επίσης βλ. αλγόριθμο Floyd-Warshall για συντομότερα μονοπάτια και μεταβατική κλειστότητα.
  - Δυναμικός προγραμματισμός (bottom-up):
    - Συνδυάζουμε γλώσσες που αποδέχονται περιορισμένα τμήματα του αυτομάτου για να βρούμε γλώσσα που αποδέχεται όλο το αυτόματο.

Παρατηρήσεις

- Κάθε πεπερασμένη γλώσσα είναι κανονική.
  - Απόδειξη (εύκολη) με επαγωγή στον #συμβ/ρών.
- Κανονική γλώσσα που αναπαρίσταται από ΚΕ χωρίς * (ισοδύναμα από DFA χωρίς «κύκλο»);
  - Είναι πεπερασμένη.
  - Ο τελεστής * (ισοδύναμα, ο κύκλος στο DFA) μοναδικός τρόπος δημιουργίας άπειρου πλήθους συμβ/ρών.

Δύο Χαρακτηριστικά Κανονικών Γλωσσών

- Η μνήμη για αναγνώριση συμβ/ράς κανονικής γλώσσας εξαρτάται από γλώσσα **αλλά όχι** συμβολοσειρά.
  - Ένδειξη ότι $\{ 1^n 0^n : n \geq 0\}$ **δεν** είναι κανονική.
- Άπειρες κανονικές γλώσσες: DFA με κύκλους.
  - Απλή επαναληπτική δομή / περιοδικότητα.
  - Ένδειξη ότι $\{1^n : n$ πρώτος$\}$ **δεν** είναι κανονική.
- Ανάγκη (μαθηματικού) εργαλείου για **απόδειξη** ότι γλώσσα είναι μη κανονική.

Λήμμα Άντλησης (Pumping Lemma)

- Έστω L μια άπειρη κανονική γλώσσα. Υπάρχει $k \geq 1$ τ.ω. κάθε $w \in L$, $|w| \geq k$, γράφεται $w = xyz$, $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq k$, και $xy^nz \in L$ για κάθε $n \geq 0$.
  - DFA M(Q, Σ, δ, s, F) με *k* καταστάσεις που αποφασίζει L.
  - Έστω $w \in L : |w| = \ell \geq k$. Υπολογισμός M(w):
    $$(q_0, w_1 w_2 \ldots w_\ell) \vdash_M (q_1, w_2 \ldots w_\ell) \vdash_M \cdots \vdash_M (q_\ell, \varepsilon)$$
  - … διέρχεται από ίδια κατάσταση τουλάχιστον 2 φορές. Υπάρχουν $0 \leq i < j \leq k$, ώστε $q_i = q_j$.
  - Έστω $x = w_1 \ldots w_i, y = w_{i+1} \ldots w_j, z = w_{j+1} \ldots w_\ell$
  - M δέχεται xy^nz : x οδηγεί M στην q_i , y^n κάνει n κύκλους με αφετηρία και κατάληξη q_i , και z οδηγεί M σε τελική.

Μη Κανονικότητα Γλωσσών

- Ν.δ.ο. $L = \{ 0^n 1^n : n \geq 0\}$ **δεν** είναι κανονική.
  - L άπειρη. Άρα αν είναι κανονική, ισχύει το Λ. Άντλησης.
  - Αν L κανονική, υπάρχει $k > 0$, τ.ω. για κάθε $w \in L$, $|w| \geq k$, υπάρχουν x, y, z συμ/ρές, $w = xyz$, $|xy| \leq k$, $y \neq \varepsilon$, και $x\, y^n z \in L$ για κάθε $n \geq 0$.
  - Πρέπει $x\, y\, z \in L$ ($n = 1$).
    - Αν y αποτελείται μόνο από 0, $x\, y^0 z \notin L$ (πιο πολλά 1).
    - Αν y αποτελείται μόνο από 1, $x\, y^0 z \notin L$ (πιο πολλά 0).
    - Αν y αποτελείται από 0 ακολουθούμενα από 1, $x\, y^2 z \notin L$ (γιατί $0^+1^+0^+1^+ \dots$).
  - Άρα L δεν είναι κανονική.

Μη Κανονικότητα Γλωσσών

- Ν.δ.ο. $L = \{1^n : n \text{ πρώτος}\}$ **δεν** είναι κανονική.
  - L άπειρη. Άρα αν είναι κανονική, ισχύει το Θ. Άντλησης.
  - Αν L κανονική, υπάρχουν x, y, z συμ/ρές, $y \neq \varepsilon$, ώστε $x\,y^n\,z \in L$ για κάθε $n \geq 0$.
    - Δηλαδή $|x| + n|y| + |z|$ **πρώτος** για κάθε $n \geq 0$.
    - **Δεν** ισχύει για $\mathbf{n} = |x| + 2|y| + |z| + 2$, αφού:

$$|x| + (|x| + 2|y| + |z| + 2)|y| + |z| = (|x| + 2|y| + |z|)(|y| + 1)$$

που δεν είναι πρώτος!

  - L **δεν** είναι κανονική.

Μη Κανονικότητα Γλωσσών

- Ν.δ.ο. L = $\{w \in \{0, 1\}^*$: w έχει ίδιο αριθμό 0 και 1$\}$ **δεν** είναι κανονική.
  - $L \cap 0^*1^* = \{ 0^n 1^n : n \geq 0\}$, που **δεν** είναι κανονική.
  - 0^*1^* κανονική.
  - Κανονικές γλώσσες κλειστές ως προς τομή.
  - Άρα L δεν είναι κανονική.