

# Πεπερασμένα Αυτόματα

---

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

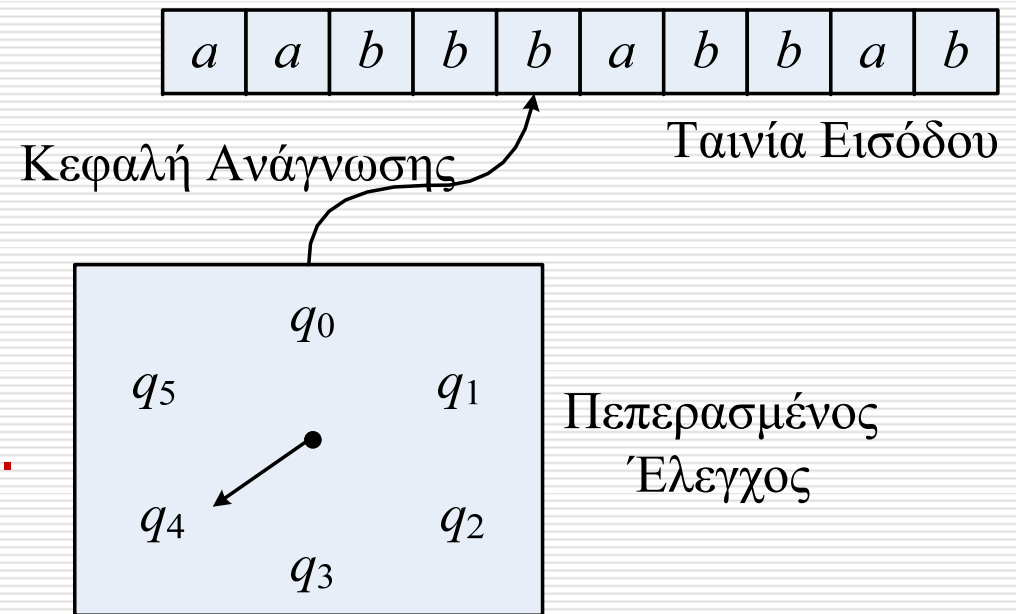
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



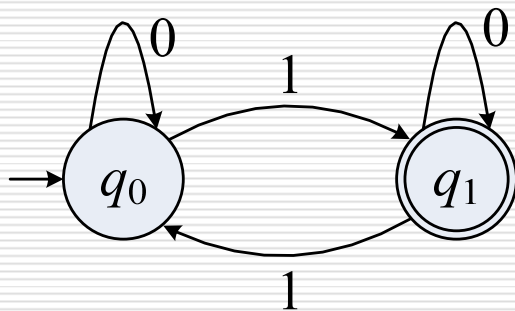
# Πεπερασμένα Αυτόματα

- ... είναι απλούστερες υπολογιστικές μηχανές.
  - «Κεντρική Μονάδα» με πεπερασμένο #καταστάσεων.  
'Όχι άλλη μνήμη.
  - Είσοδος σειριακά από ταινία μέσω κεφαλής ανάγνωσης.
  - Νέο σύμβολο εισόδου εξετάζεται μία φορά, και προκαλεί αλλαγή κατάστασης.
  - 'Όχι έξοδος εκτός από χαρακτηρισμό τελευταίας κατάστασης ως κατάσταση αποδοχής.



# Ορισμός

- Ένα **ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο** (DFA) είναι μια πεντάδα  $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$  όπου:
- $Q$  ένα πεπερασμένο σύνολο **καταστάσεων**.
  - $\Sigma$  ένα **αλφάβητο** (εισόδου).
  - $s \in Q$  η **αρχική κατάσταση**.
  - $F \subseteq Q$  το σύνολο **καταστάσεων αποδοχής**.
  - $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$  η **συνάρτηση μετάβασης**.



$$Q = \{q_0, q_1\},$$

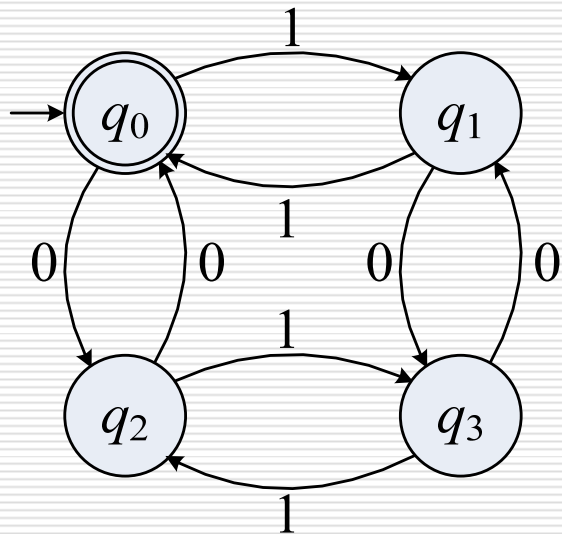
$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$s = q_0,$$

$$F = \{q_1\}$$

$q$	$\sigma$	$\delta(q, \sigma)$
$q_0$	0	$q_0$
$q_0$	1	$q_1$
$q_1$	0	$q_1$
$q_1$	1	$q_0$

# Παράδειγμα



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

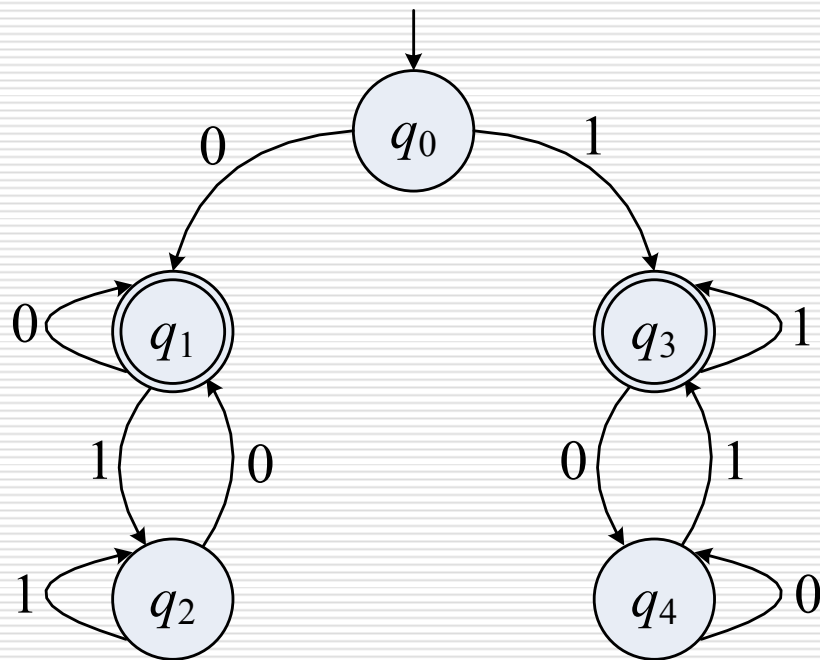
$$s = q_0,$$

$$F = \{q_0\}$$

$q$	$\sigma$	$\delta(q, \sigma)$
$q_0$	0	$q_2$
$q_0$	1	$q_1$
$q_1$	0	$q_3$
$q_1$	1	$q_0$
$q_2$	0	$q_0$
$q_2$	1	$q_3$
$q_3$	0	$q_1$
$q_3$	1	$q_2$

- Αποδέχεται συμβολοσειρές με ζυγό αριθμό 0 και 1.
- Αν αλλάξουμε τελικές καταστάσεις;

# Παράδειγμα



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$s = q_0,$$

$$F = \{q_1, q_3\}$$

$q$	$\sigma$	$\delta(q, \sigma)$
$q_0$	0	$q_1$
$q_0$	1	$q_3$
$q_1$	0	$q_1$
$q_1$	1	$q_2$
$q_2$	0	$q_1$
$q_2$	1	$q_2$
$q_3$	0	$q_4$
$q_3$	1	$q_3$
$q_4$	0	$q_4$
$q_4$	1	$q_3$

- Αποδέχεται δυαδικές συμβολοσειρές που **αρχίζουν και τελειώνουν με το ίδιο σύμβολο.**

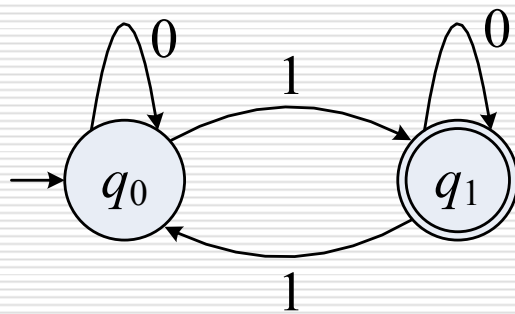
# Υπολογισμός DFA

---

- DFA  $M(Q, \Sigma, \delta, s, F)$  **αποδέχεται** συμβ/ρά  $w$  αν ξεκινώντας από **αρχική κατάσταση**  $s$ , αφού επεξεργαστεί το  $w$ , καταλήγει σε **κατάσταση αποδοχής**.
- **Συνολική κατάσταση** (configuration)  $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$ 
  - $q$  τρέχουσα κατάσταση.
  - $w$  είσοδος που δεν έχει επεξεργασθεί ακόμη.
- Συνάρτηση **παράγει άμεσα**  $\vdash_M: Q \times \Sigma^+ \mapsto Q \times \Sigma^*$ 
  - $(q, w) \vdash_M (q', w')$  αν και μόνο αν
    - $w = \sigma w'$  για κάποιο  $\sigma \in \Sigma$
    - $\delta(q, \sigma) = q'$

# Παράδειγμα

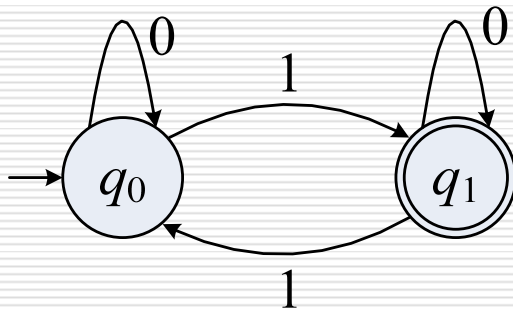
---



$(q_0, 011010) \vdash_M (q_0, 11010)$   
 $\vdash_M (q_1, 1010)$   
 $\vdash_M (q_0, 010)$   
 $\vdash_M (q_0, 10)$   
 $\vdash_M (q_1, 0)$   
 $\vdash_M (q_1, \varepsilon)$

# Υπολογισμός DFA

- Σχέση **παράγει**  $\vdash_M^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$ 
  - $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$  αν και μόνο αν υπάρχουν  $n \geq 0$ ,  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1} \in Q$  και  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \Sigma$  τέτοια ώστε:
    - $w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w'$  και
    - $\delta(q, \sigma_1) = q_1, \delta(q_1, \sigma_2) = q_2, \dots, \delta(q_{n-1}, \sigma_n) = q'$
  - Άρα  $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$  ανν  
 $(q, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M \dots \vdash_M (q', w')$



$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_0, 11010)$$

$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_0, 010)$$

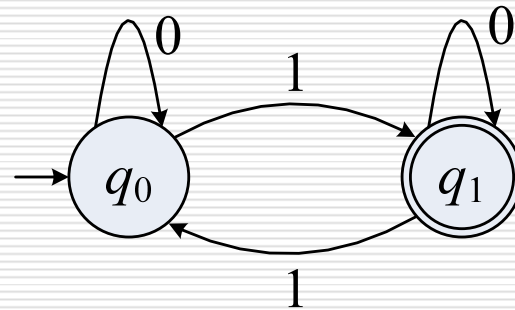
$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_1, 0)$$

$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_1, \varepsilon)$$



# Υπολογισμός DFA

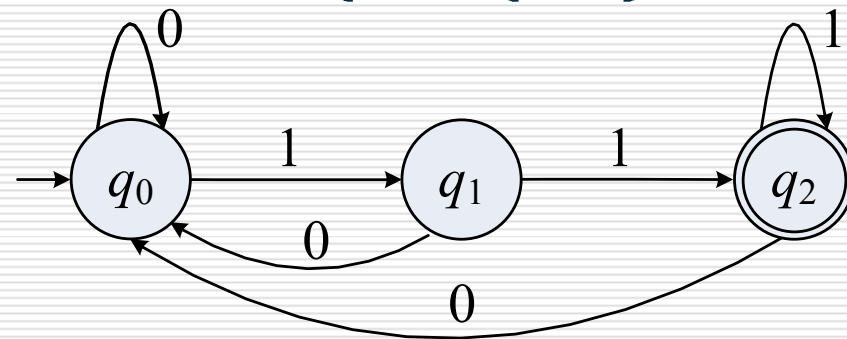
- DFA  $M$  δέχεται συμβ/ρά  $w$  ή  $w$  είναι αποδεκτό από  $M$  όταν
  - για κάποιο  $q \in F, (s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$
- Γλώσσα  $M$  :  $L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ είναι αποδεκτό από } M\}$
- Γλώσσα εικονιζόμενου DFA;



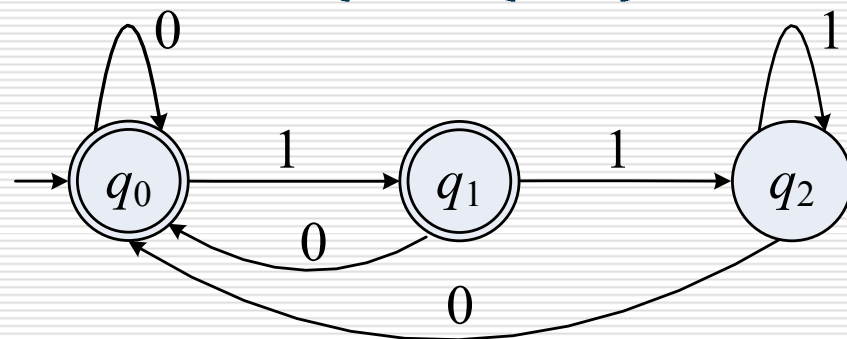
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ περιέχει περιττό αριθμό από } 1\}$$

# Παράδειγμα

- DFA που δέχεται  $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ τελειώνει σε } 11\}$

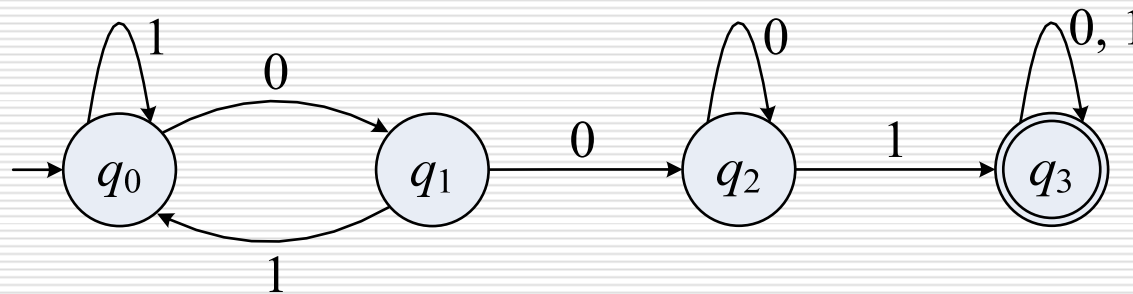


- DFA που δέχεται  $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ δεν τελειώνει σε } 11\}$

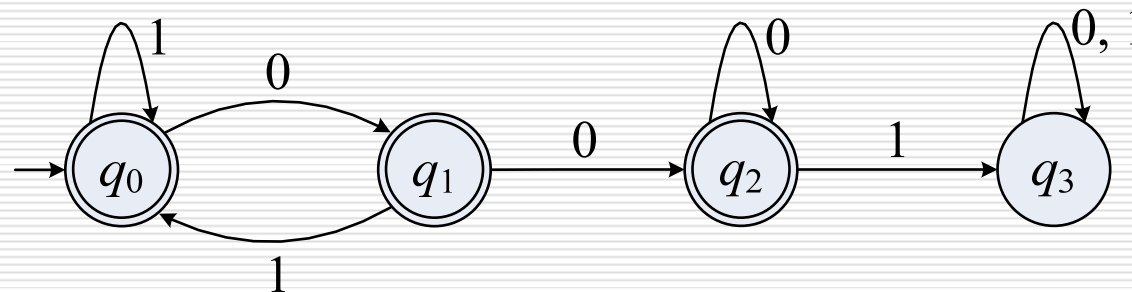


# Παράδειγμα

- DFA που δέχεται  $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ περιέχει } 001\}$



- DFA που δέχεται  $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ δεν περιέχει } 001\}$



# Μη Ντετερμινισμός

---

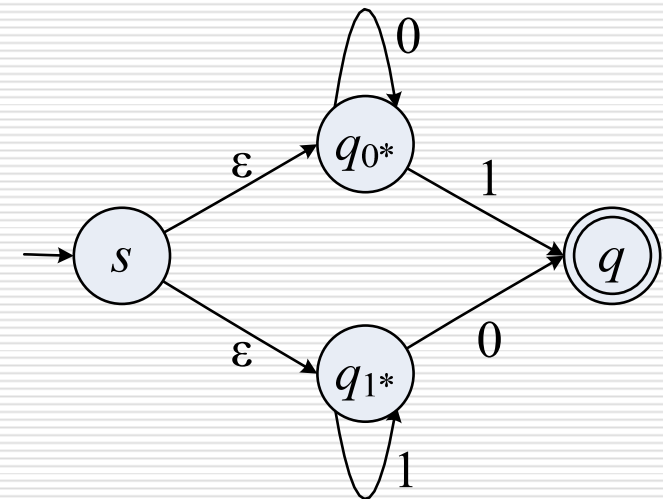
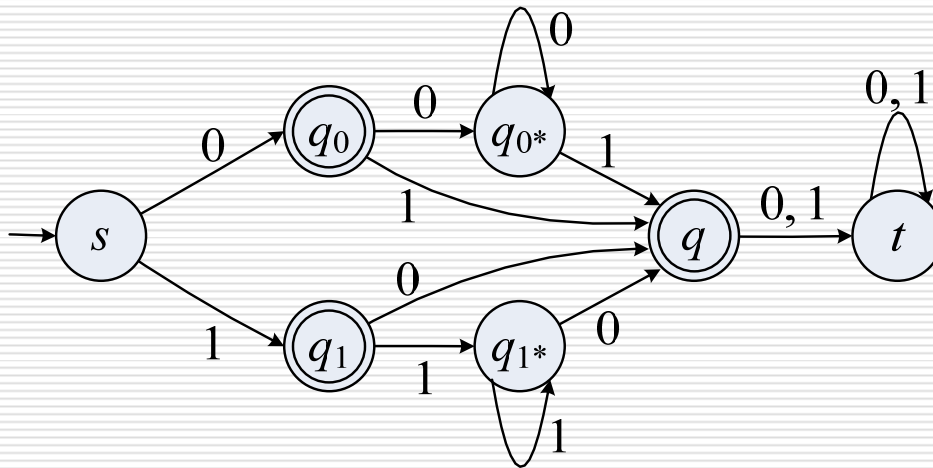
- **Ντετερμινισμός:** επόμενη κατάσταση **καθορίζεται** από τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου.
  - **Συνάρτηση** μετάβασης  $\delta$ .
- **Μη Ντετερμινισμός:** αλλαγή κατάστασης **προσδιορίζεται μερικώς** από τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου.
  - Τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου: υπάρχουν **καμία ή περισσότερες επόμενες καταστάσεις**.
  - Μετάβαση **χωρίς να «καταναλωθεί»** σύμβολο εισόδου.
  - **Σχέση** (και **όχι συνάρτηση**) μετάβασης  $\Delta$ .
    - Ισοδύναμα, συνάρτηση  $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \mapsto \mathcal{P}(Q)$
  - Συμβ/ρά εισόδου **αποδεκτή** αν **υπάρχει** ακολουθία που οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής (όπου έχει «καταναλωθεί» είσοδος).

# Παράδειγμα

- Ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει

$$0^*1 \cup 1^*0$$

$L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ έχει είτε ένα μόνο } 1 \text{ στο τέλος}$   
 $\text{είτε ένα μόνο } 0 \text{ στο τέλος} \}$

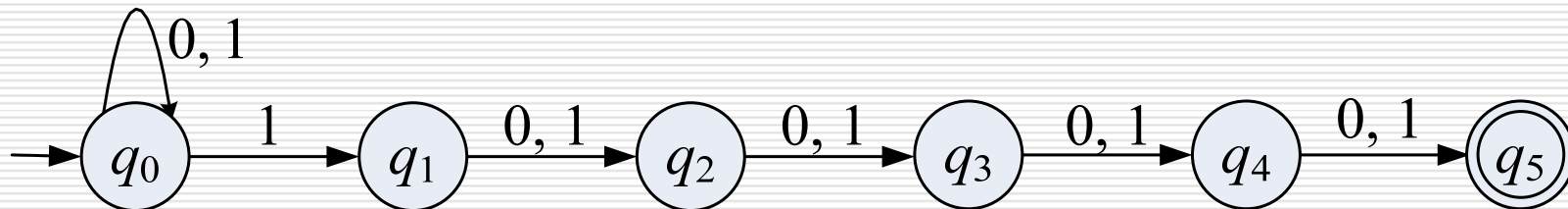


- Μη ντετερμινιστικό αυτόματο για L.

- Αποδέχεται **αν υπάρχει** τρόπος μετάβασης από  $s \rightarrow q$ 
  - Αν υπάρχει, τον «μαντεύει» (δεν κάνει ποτέ λάθος)
  - Εκτελεί όλες τις επιτρεπτές **μεταβάσεις παράλληλα.**
- Υπολογισμός για 0001 και 00011.

# Παράδειγμα

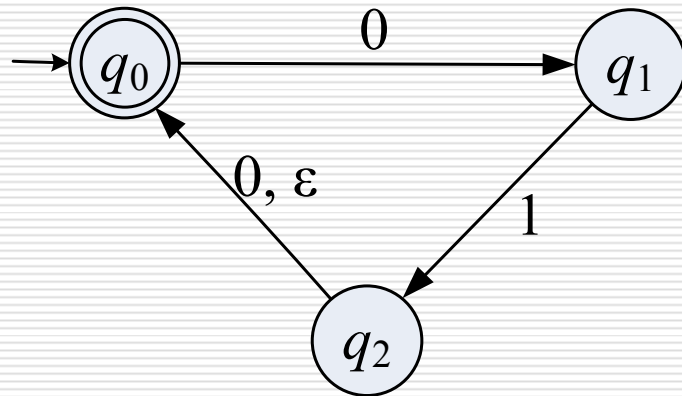
- Ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει  
 $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ έχει } 1 \text{ στην } 5\text{η} \text{ θέση από δεξιά}\}$ 
  - Ο **ελάχιστος** #καταστάσεων είναι **32**.
- Μη ντετερμινιστικό αυτόματο;



- Υπολογισμός για 000, 11101111, 11111, 00010000.
- Παράδειγμα **δέντρου υπολογισμού**.

# Ορισμός

- Ένα **μη ντετερμινιστικό** πεπερασμένο αυτόματο (NFA) είναι μια πεντάδα  $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$  όπου:
- $Q$  ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων.
  - $\Sigma$  ένα αλφάβητο (εισόδου).
  - $s \in Q$  η αρχική κατάσταση.
  - $F \subseteq Q$  το σύνολο των καταστάσεων αποδοχής.
  - $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$  η **σχέση** μετάβασης.



$$Q = \{q_0, q_1, q_2\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$s = q_0,$$

$$F = \{q_0\}$$

Σχέση  $\Delta$

$$(q_0, 0, q_1)$$

$$(q_1, 1, q_2)$$

$$(q_2, 1, q_0)$$

$$(q_2, \varepsilon, q_0)$$

# Υπολογισμός NFA

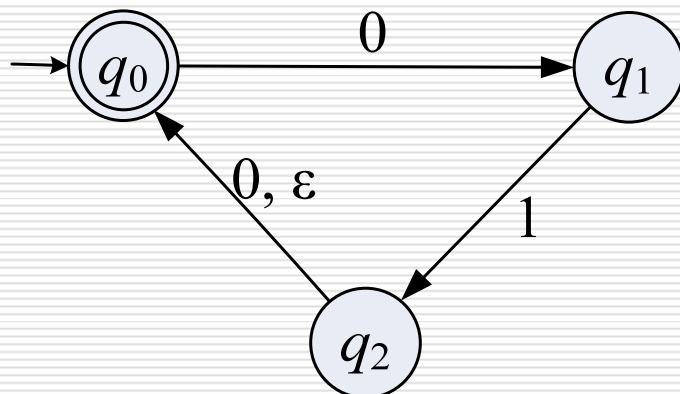
---

- $M(K, \Sigma, \Delta, s, F)$  **αποδέχεται** συμβ/ρά  $w$  αν ξεκινώντας από **αρχική κατάσταση**  $s$ , αφού επεξεργαστεί  $w$ , το  $M$  **μπορεί να καταλήξει** σε κάποια **κατάσταση αποδοχής**.
- **Συνολική κατάσταση** (configuration)  $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$ 
  - $q$  τρέχουσα κατάσταση (αλλά μπορεί σε **πολλές!**).
  - $w$  είσοδος που δεν έχει επεξεργασθεί ακόμη.
- Σχέση **παράγει άμεσα**  $\vdash_M \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$ 
  - $(q, w) \vdash_M (q', w')$  αν και μόνο αν
    - $w = \sigma w'$  για κάποιο  $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
    - $(q, \sigma, q') \in \Delta$



# Υπολογισμός NFA

- Σχέση **παράγει**  $\vdash_M^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$ 
  - $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$  αν και μόνο αν υπάρχουν  $n \geq 0$ ,  
 $q_1, q_2, \dots, q_{n-1} \in Q$  και  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  τέτοια ώστε:
    - $w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w'$  και
    - $(q, \sigma_1, q_1), (q_1, \sigma_2, q_2), \dots, (q_{n-1}, \sigma_n, q') \in \Delta$
  - Άρα  $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$  ανν **δύναται**  
 $(q, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M \dots \vdash_M (q', w')$



$$(q_0, 01010) \vdash_M (q_1, 1010)$$

$$(q_1, 1010) \vdash_M (q_2, 010)$$

$$(q_2, 010) \vdash_M (q_0, 010)$$

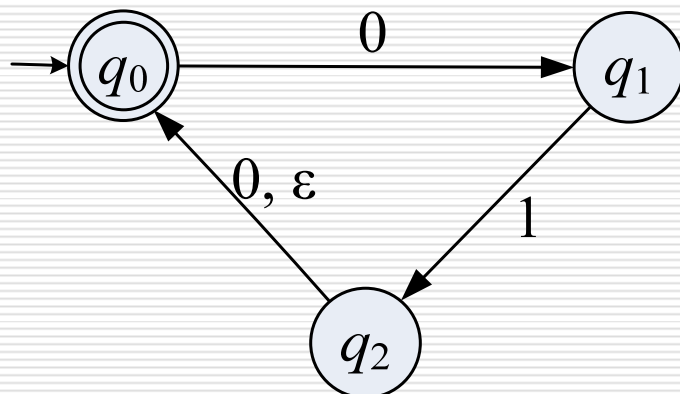
$$(q_0, 010) \vdash_M (q_1, 10)$$

$$(q_1, 10) \vdash_M (q_2, 0)$$

$$(q_2, 0) \vdash_M (q_0, \varepsilon)$$

# Υπολογισμός NFA

- Σχέση **παράγει**  $\vdash_M^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$ 
  - $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$  αν και μόνο αν υπάρχουν  $n \geq 0$ ,  
 $q_1, q_2, \dots, q_{n-1} \in Q$  και  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  τέτοια ώστε:
    - $w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w'$  και
    - $(q, \sigma_1, q_1), (q_1, \sigma_2, q_2), \dots, (q_{n-1}, \sigma_n, q') \in \Delta$
  - Άρα  $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$  ανν **δύναται**  
 $(q, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M \dots \vdash_M (q', w')$

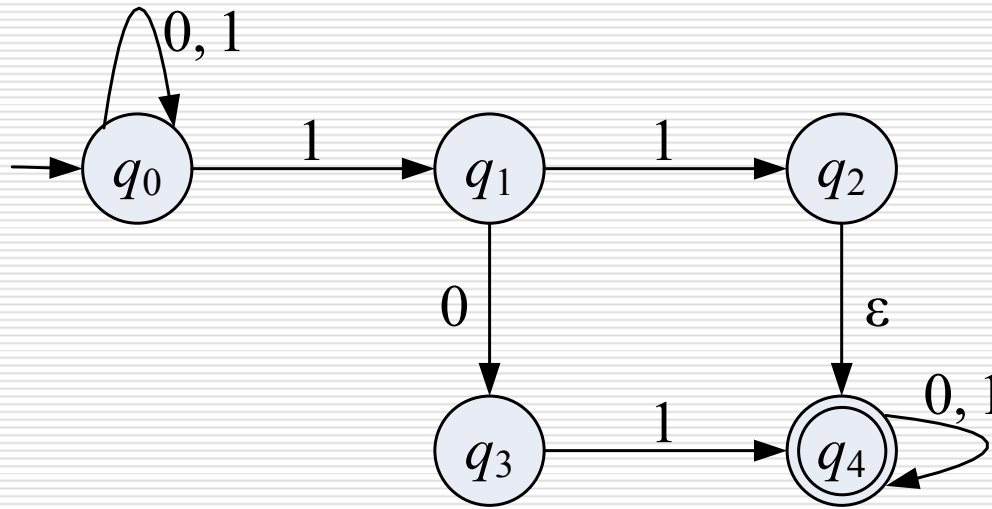


$$(q_0, 01010) \vdash_M^* (q_0, \varepsilon)$$
$$(q_0, 01010) \vdash_M^* (q_0, 10)$$

# Υπολογισμός NFA

- NFA  $M$  δέχεται συμβ/ρά  $w$  ή  $w$  είναι αποδεκτό από  $M$  όταν
  - για κάποιο  $q \in F, (s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$
- Γλώσσα  $M$ :  $L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ είναι αποδεκτό από } M\}$
- Γλώσσα εικονιζόμενου NFA;

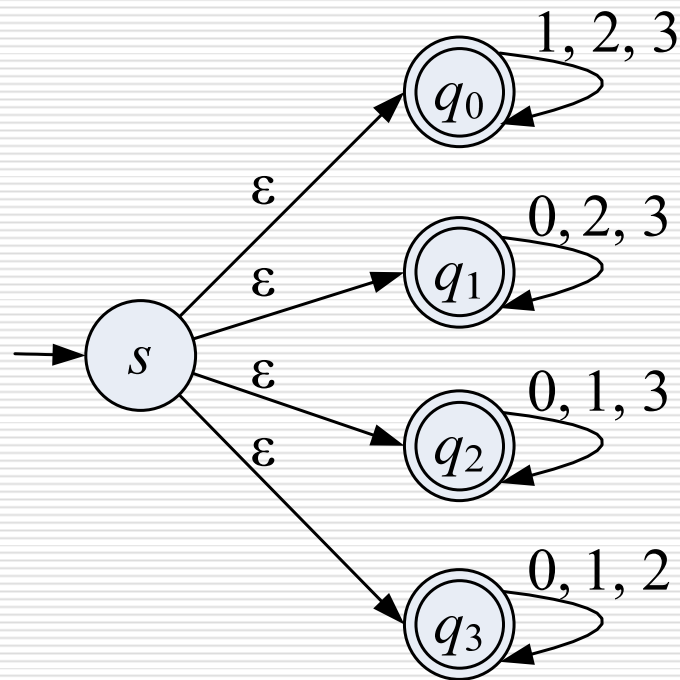
$$L(M) = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ περιέχει } 11 \text{ ή } 101\}$$



# Παράδειγμα

□ NFA που δέχεται

$$L = \{w \in \{0, 1, 2, 3\}^* : \exists a \in \Sigma \text{ που δεν εμφανίζεται στο } w\}$$



# Μη Ντετερμινισμός

---

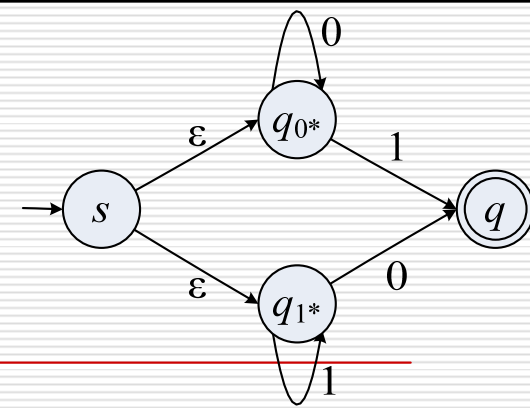
- Ντετερμινιστικός υπολογισμός: **μονοπάτι**.
  - Αποδοχή αν **καταλήγει σε** κατάσταση αποδοχής.
- Μη ντετερμινιστικός υπολογισμός: **δέντρο**.
  - Αποδοχή αν **υπάρχει** κλάδος που οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής.
- Ντετερμινιστικές μηχανές αποτελούν **ειδική περίπτωση** μη ντετερμινιστικών.
- **Δεν** πρόκειται για ρεαλιστικό μοντέλο υπολογισμού.
  - Διευκολύνουν **σχεδιασμό** και έλεγχο λειτουργίας.
  - Λειτουργία πιο **κοντά** στην «ανθρώπινη **σκέψη**».
  - **Ντετερμινιστική προσομοίωση**: λειτουργική ισοδυναμία. «Είναι αποτελεσματική;» αποτελεί την ουσία του **P vs NP**.

# Ισοδυναμία DFA και NFA

---

- Αυτόματα  $M_1$  και  $M_2$  **ισοδύναμα**:  $L(M_1) = L(M_2)$ .
  - Αναγνωρίζουν ίδια γλώσσα με (ενδεχ.) διαφορετική μέθοδο.
- DFA είναι **ειδική περίπτωση** των NFA.
- Για κάθε **NFA** αυτόματο  $M(Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ , υπάρχει **ισοδύναμο DFA**  $M'(Q', \Sigma, \delta', s', F')$ .
  - $\Delta$  ορίζεται ισοδύναμα ως  $\Delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \mapsto \mathcal{P}(Q)$
  - NFA βρίσκεται (παράλληλα) σε **σύνολο καταστάσεων**:
    - Καταστάσεις  $M'$  είναι υποσύνολα  $Q$ ,  $Q' \subseteq \mathcal{P}(Q)$
  - **Επόμενη κατάσταση  $M'$** : **σύνολο καταστάσεων** όπου καταλήγει  $M$  από **τρέχον σύνολο καταστάσεων** με συγκεκριμένο **σύμβολο εισόδου**.

# Ισοδυναμία NFA και DFA



- Για μεταβάσεις με  $\varepsilon$  (κενή συμβολοσειρά):
  - Σύνολο καταστάσεων προσιτό από  $q$  χωρίς είσοδο.

$$E(q) = \{p \in Q : (q, \varepsilon) \vdash_M^* (p, \varepsilon)\}$$

- Περιγραφή ντετερμινιστικού  $M'$ :

$$Q' = \mathcal{P}(Q) \quad \text{Όλα τα υποσύνολα του } Q$$

$$s' = E(s) \quad \text{Σύνολο με κατ. προσπελάσιμες από } s \text{ με } \varepsilon$$

$$F' = \{S \in \mathcal{P}(Q) : S \cap F \neq \emptyset\} \quad \text{Σύνολα με κατ. αποδοχής του } M$$

$$\delta'(S, \sigma) = \bigcup_{p \in Q: \exists q \in S \text{ τ.ω. } (q, \sigma, p) \in \Delta} E(p) \quad \forall S \in \mathcal{P}(Q), \forall \sigma \in \Sigma$$

- DFA  $M'$  προσομοιώνει NFA  $M$  (απόδειξη με επαγωγή στο  $|w|$ ):

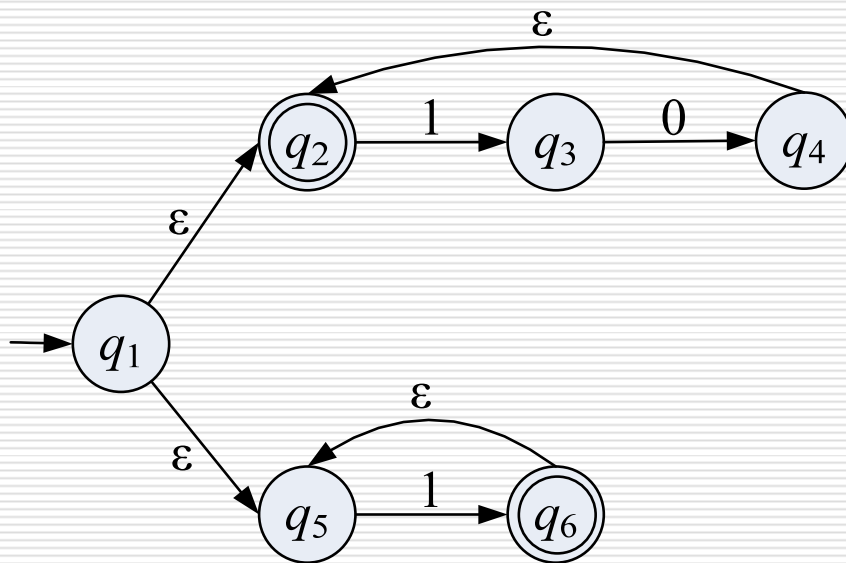
$$\forall w \in \Sigma^*, \forall q, p \in Q, \exists S_q, S_p \subseteq Q, E(q) \subseteq S_q, p \in S_p :$$

$$(q, w) \vdash_M^* (p, \varepsilon) \Leftrightarrow (S_q, w) \vdash_{M'}^* (S_p, \varepsilon)$$

# Παράδειγμα

□ **Κατασκευαστική** απόδειξη (εκθετικός χρόνος λόγω  $P(Q)$ ).

$$\begin{aligned}\delta'(S, \sigma) &= \bigcup_{p \in Q: \exists q \in S \text{ τ.ω. } (q, \sigma, p) \in \Delta} E(p) \\ &= \{p \in Q : (q, \sigma) \vdash_M^* (p, \varepsilon) \text{ για κάποιο } q \in S\}\end{aligned}$$



$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_5\}$$

$$E(q_2) = \{q_2\}$$

$$E(q_3) = \{q_3\}$$

$$E(q_4) = \{q_2, q_4\}$$

$$E(q_5) = \{q_5\}$$

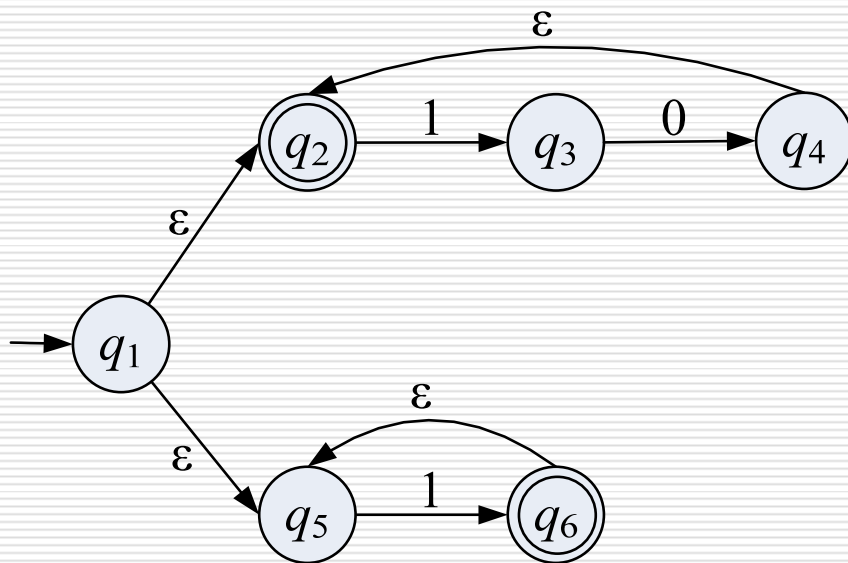
$$E(q_6) = \{q_5, q_6\}$$

$$s' = \{q_1, q_2, q_5\}$$



# Παράδειγμα

$$\delta'(S, \sigma) = \bigcup_{p \in Q: q \in S \wedge (q, \sigma, p) \in \Delta} E(p)$$



$q$	$\sigma$	$\delta(q, \sigma)$
$\{q_1, q_2, q_5\}$	0	$\emptyset$
$\{q_1, q_2, q_5\}$	1	$\{q_3, q_5, q_6\}$
$\{q_3, q_5, q_6\}$	0	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_3, q_5, q_6\}$	1	$\{q_5, q_6\}$
$\{q_2, q_4\}$	0	$\emptyset$
$\{q_2, q_4\}$	1	$\{q_3\}$
$\{q_5, q_6\}$	0	$\emptyset$
$\{q_5, q_6\}$	1	$\{q_5, q_6\}$
$\{q_3\}$	0	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_3\}$	1	$\emptyset$
$\emptyset$	0	$\emptyset$
$\emptyset$	1	$\emptyset$

# Παράδειγμα

$$\delta'(S, \sigma) = \bigcup_{p \in Q: \exists q \in S \text{ τ.ω. } (q, \sigma, p) \in \Delta} E(p)$$

