

Στοιχεία Κατηγορηματικής Λογικής

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Κατηγορηματική Λογική

- **Προτασιακή Λογική:** πλαίσιο διατύπωσης και μελέτης επιχειρημάτων για πεπερασμένο πλήθος «λογικών αντικειμένων».
 - «Λογικό αντικείμενο»: παίρνει τιμές αλήθειας, A ή Ψ .
 - Διαφορετικά, «μη λογικό αντικείμενο», π.χ. αριθμοί, σύνολα, ...
- **Κατηγορηματική (ή Πρωτοβάθμια) Λογική:** πλαίσιο διατύπωσης και μελέτης επιχειρημάτων για:
 - «Μη λογικά αντικείμενα» (αριθμούς, σύνολα, γραφήματα).
 - **Πράξεις** (συναρτήσεις) και **σχέσεις** (κατηγορήματα) μεταξύ τους.
 - Άπειρο πλήθος αντικειμένων: ποσοδείκτες.
 - «Κάθε φυσικός αριθμός είναι είτε άρτιος είτε περιττός».
 - «Υπάρχει σύνολο που είναι υποσύνολο κάθε συνόλου».
 - Τύποι ΚΛ είναι «λογικά αντικείμενα» που μπορεί να αφορούν / αναφέρονται σε «μη λογικά αντικείμενα».

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟ Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

- «Λογικά Σύμβολα»: έχουν συγκεκριμένη ερμηνεία, λειτουργούν πάντα με τον ίδιο τρόπο:
 - Λογικοί σύνδεσμοι: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
 - Ποσοδείκτες: \forall και \exists
 - \forall (για κάθε): **σύζευξη** για όλα στοιχεία δομής (δυνάμει άπειρη).
 - \exists (υπάρχει): **διάζευξη** για όλα στοιχεία δομής (δυνάμει άπειρη).
 - Ισότητα = : ελέγχει **ταύτιση**.
 - Λειτουργεί ως **κατηγορηματικό σύμβολο**, αλλά εντάσσεται στα «λογικά σύμβολα» γιατί έχει συγκεκριμένη ερμηνεία.
 - Σημεία στίξης και παρενθέσεις.

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟ Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

- «Μη Λογικά Σύμβολα»: ερμηνεία καθορίζει λειτουργία τους.
 - Ορισμός γλώσσας και έλεγχος αλήθειας απαιτούν ερμηνεία τους (πολυσημία, εκφραστικότητα!).
 - Μεταβλητές x, y, z, \dots
 - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού μεταβλητών: **σύμπαν**.
 - **Ελεύθερες**: τιμή τους καθορίζεται με **αποτίμηση**.
 - **Δεσμευμένες**: **ποσοδείκτες** καθορίζουν «συμπεριφορά» τους.
 - Σύμβολα **σταθερών** c, c_1, c_2, \dots
 - Αναπαριστούν **συμβολικά συγκεκριμένες τιμές** σύμπαντος.
 - Ερμηνεία καθορίζει **τιμή** κάθε συμβόλου σταθεράς.
 - Πρόκειται για 0-θέσια συναρτησιακά σύμβολα.

Συντακτικό Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

- «Μη Λογικά Σύμβολα»: ερμηνεία καθορίζει λειτουργία τους.
 - **Συναρτησιακά** σύμβολα f, g, h, \dots , με αντίστοιχο πλήθος ορισμάτων.
 - Π.χ. f είναι 2-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο.
 - Εκφράζουν «**πράξεις**» μεταξύ στοιχείων σύμπαντος.
 - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, και **λειτουργία**.
 - **Κατηγορηματικά** σύμβολα P, Q, R, \dots , με αντίστοιχο πλήθος ορισμάτων.
 - Π.χ. Q είναι 2-μελές κατηγορηματικό σύμβολο.
 - Εκφράζουν «**σχέσεις**» μεταξύ στοιχείων σύμπαντος.
 - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού και **λειτουργία**.
 - Κατηγορηματικά σύμβολα υλοποιούν «**μετάβαση**» από «μη λογικό» σε «λογικό» κόσμο.
 - $Q(x, y)$ δέχεται δύο στοιχεία σύμπαντος (π.χ. αριθμούς), «ελέγχει» αν σχετίζονται με συγκεκριμένο τρόπο, και «απαντά» A ή Ψ .

Δομή Τύπων

Πρωτοβάθμιας Γλώσσας: Όροι

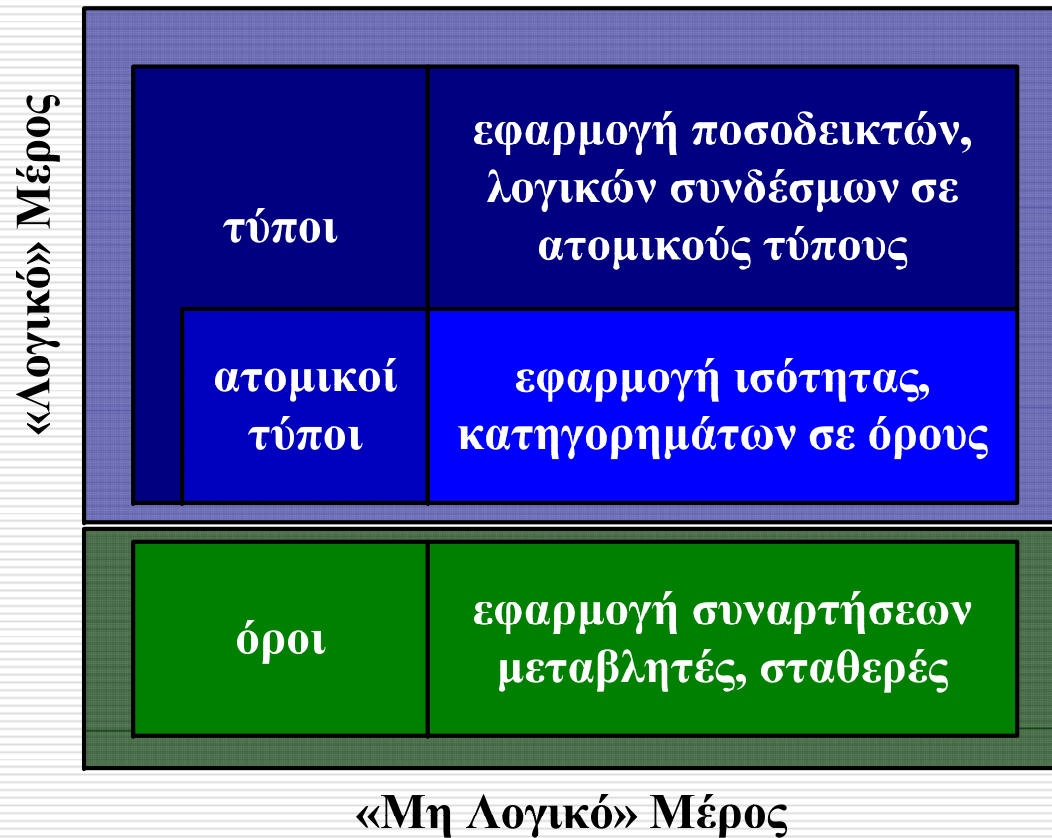
- Όροι παίρνουν **τιμές στο σύμπαν**.
 - Μεταβλητές x, y, z, \dots
 - Σταθερές c, c_1, c_2, \dots
 - Οτιδήποτε προκύπτει από (σωστή) **εφαρμογή συναρτησιακού συμβόλου** σε ήδη σχηματισμένους όρους.
 - Π.χ. $f(x, y), f(g(x), c), g(f(x, g(y))), c \oplus f(x, y), \dots$
- Δομή αναπαρίσταται με δένδροδιάγραμμα, ιδιότητες αποδεικνύονται με δομική επαγωγή.
- Όροι **δεν** μπορούν να συνδέονται με **λογικούς συνδέσμους!**

Δομή Τύπων

Πρωτοβάθμιας Γλώσσας: Τύποι

- **Ατομικοί τύποι** προκύπτουν εφαρμόζοντας **ισότητα ή κατηγορηματικό** σύμβολο σε **όρους**.
 - Π.χ. $x = c$, $f(x, y) = g(c)$, $Q(x, y)$, $R(f(x, y))$, ...
 - «**Λογικές**» τιμές **A ή Ψ**, βασικά («λογικά») δομικά στοιχεία τύπων.
- **Τύπος**:
 - **Ατομικός** τύπος (**βάση επαγωγικού ορισμού**).
 - Εφαρμογή **λογικών συνδέσμων** σε τύπους ϕ, ψ :
 $\neg\phi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$.
 - Εφαρμογή **ποσοδεικτών** σε τύπο ϕ : $\exists x\phi$, $\forall x\phi$.
- Δομή αναπαρίσταται με δένδροδιάγραμμα, ιδιότητες αποδεικνύονται με μαθηματική επαγωγή.
- **Τύποι**: τιμή **A ή Ψ**. **Όροι**: τιμές **στο σύμπαν**.

Δομή Τύπων Πρωτοβάθμιας Γλώσσας



Παράδειγμα

- Ποια από τα παρακάτω είναι **όροι** ή **τύποι** (ή **συντακτικό λάθος**);
- | | |
|--|--|
| ■ $Q(f(c, y), P(x))$ | $g(Q(c, y), P(y))$ |
| ■ $Q(f(c, y), \mathbf{P(x)})$ | $g(\mathbf{Q(c, y)}, \mathbf{P(y)})$ |
| ■ $\forall x P(g(x))$ | $\forall x g(P(x))$ |
| ■ $\forall x P(g(x))$ (τ) | $\forall x \mathbf{g(P(x))}$ |
| ■ $x = y \vee c$ | $x = f(y, c)$ |
| ■ $x = \mathbf{y} \vee \mathbf{c}$ | $x = f(y, c)$ (ατ) |
| ■ $\forall x P(P(x))$ | $\exists x Q(x, c_1)$ |
| ■ $\forall x P(\mathbf{P(x)})$ | $\exists x Q(x, c_1)$ (τ) |
| ■ $\exists x (P(x) \vee \neg \forall x P(x, x))$ | $\exists x (x = y \wedge Q(x, y))$ |
| ■ $\exists x (\mathbf{P(x)} \vee \neg \forall x \mathbf{P(x, x)})$ | $\exists x (x = y \wedge Q(x, y))$ (τ) |

Παράδειγμα

- Ποια από τα παρακάτω είναι όροι ή τύποι (ή συντακτικό λάθος);
- $P(x) \vee g(x)$ $\forall y \exists x (Q(x, g(y)) \vee P(g(x)))$
 - $P(x) \vee g(x)$ $\forall y \exists x (Q(x, g(y)) \vee P(g(x)))$ (τ)
 - $\exists x Q(x, c)$ $\forall \exists x Q(x, y)$
 - $\exists x Q(x, c)$ (τ) $\forall \exists x Q(x, y)$
 - $x + y = x * y$ $(3 + 1) + 10$
 - $x + y = x * y$ (ατ) $(3 + 1) + 10$ (ορ)
 - $\forall x \exists y (x + y = x * y)$ $\forall x \exists y (P(x) \vee (Q(x, y) \rightarrow \neg P(x)))$
 - $\forall x \exists y (x + y = x * y)$ (τ) $\forall x \exists y (P(x) \vee (Q(x, y) \rightarrow \neg P(x)))$ (τ)

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Δεσμευμένη **εμφάνιση** μεταβλητής: εμπίπτει σε **πεδίο εφαρμογής** ποσοδείκτη.
 - Ποσοδείκτης καθορίζει πως αποτιμάται η μεταβλητή.
 - \forall (\exists): σύζευξη (διάζευξη) για όλες τιμές σύμπαντος.
 - Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητής x που εμπίπτουν **στον ίδιο** ποσοδείκτη: «ίδια» δεσμευμένη μεταβλητή.
 - Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητής x που εμπίπτουν **σε διαφορετικό** ποσοδείκτη: «διαφορετικές» δεσμευμένες μεταβλητές.
- Ελεύθερη **εμφάνιση** μεταβλητής: **δεν** εμπίπτει σε πεδίο εφαρμογής κάποιου ποσοδείκτη.
 - Μπορεί να έχει **οποιαδήποτε τιμή**, η οποία καθορίζεται από **αποτίμηση**.
 - Όλες οι **ελεύθερες** εμφανίσεις μεταβλητής x : «ίδια» μεταβλητή.
- $\exists \mathbf{x}(P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \wedge P(\mathbf{y})$ και $\exists \mathbf{x}P(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x}Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge P(\mathbf{y})$

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- **Ελεύθερη μεταβλητή** αν εμφανίζεται ελεύθερη (τουλ. μία φορά), διαφορετικά **δεσμευμένη**.
- **Πρόταση**: τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.
Τιμή αλήθειας πρόταση δεν εξαρτάται από αποτίμηση.

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Ποιές εμφανίσεις μεταβλητών είναι **ελεύθερες** και ποιές **δεσμευμένες**;

- $\forall y \exists x (P(x, f(y)) \vee Q(x))$ $\forall x \exists y (Q(x) \vee P(x, y)) \rightarrow \neg Q(x)$

- $\forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x} (P(\mathbf{x}, f(\mathbf{y})) \vee Q(\mathbf{x}))$ $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} (Q(\mathbf{x}) \vee P(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \rightarrow \neg Q(\mathbf{x})$

- $\forall x P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, x)$ $Q(z) \rightarrow \neg \forall x \forall y P(x, y)$

- $\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{z} P(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ $Q(\mathbf{z}) \rightarrow \neg \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

- $\forall x Q(x) \rightarrow \forall y P(x, y)$ $\forall x \forall y \forall z (x > y \wedge y > z) \rightarrow \exists w (x > w)$

- $\forall \mathbf{x} Q(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{y} P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{z} (\mathbf{x} > \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} > \mathbf{z}) \rightarrow \exists \mathbf{w} (\mathbf{x} > \mathbf{w})$

- $y + x = x + y$ $\exists y (x + x = x * y)$

- $\mathbf{y} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ $\exists \mathbf{y} (\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{y})$

- Μετονομασία **όλων εμφανίσεων** της «ίδιας» μεταβλητής διατηρεί **απαράλλακτο** τον τύπο: **αλφαβητική παραλλαγή**.

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- **Ελεύθερη μεταβλητή** αν εμφανίζεται ελεύθερη (τουλ. μία φορά), διαφορετικά **δεσμευμένη**.
- **Πρόταση**: τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.
Τιμή αλήθειας πρόταση δεν εξαρτάται από αποτίμηση.
- Ελεύθερες μεταβλητές χρειάζονται **«αρχικοποίηση»**.
 - Όλες οι **ελεύθερες** εμφανίσεις μιας μεταβλητής **«αρχικοποιούνται»** στην **ίδια τιμή** (αυτή που καθορίζεται από **αποτίμηση**).
- Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών **δεν** χρειάζονται **«αρχικοποίηση»**.
 - Ποσοδείκτης που τις δεσμεύει καθορίζει αποτίμηση.
 - Μεταβλητές που δεσμεύονται από **διαφορετικούς ποσοδείκτες** είναι **«διαφορετικές»** (ακόμη και αν έχουν το ίδιο όνομα).

Ερμηνεία (ή Δομή)

- Ορισμός Πρωτοβάθμιας Γλώσσας **απαιτεί ερμηνεία** «μη λογικών» συμβόλων.
- Ερμηνεία (ή δομή) A καθορίζει:
 - **Σύμπαν $|A|$** : πεδίο ορισμού σταθερών, μεταβλητών, συναρτήσεων, και κατηγορημάτων.
 - $|A|$ είναι το **σύνολο αντικειμένων** στα οποία αναφερόμαστε.
 - **Ορισμός συναρτησιακών συμβόλων**: «πράξη» που αντιστοιχούν.
 - Τι «επιστρέφει» κάθε συναρτησιακό σύμβολο.
 - **Ορισμός κατηγορηματικών συμβόλων**: «σχέση» που αντιστοιχούν.
 - Πότε κατηγορηματικό σύμβολο «επιστρέφει» A και πότε Ψ .
 - Ορισμός **τιμής** για κάθε σύμβολο **σταθεράς**.

Παραδείγματα Ερμηνείας

- Γλώσσα **Θεωρίας Αριθμών**:
 - Σύμπαν **\mathbf{N}** (φυσικοί αριθμοί)
 - Σταθερά **$\mathbf{0}$** (αποτ. στο 0), συναρτησιακά **\oplus** (πρόσθεση), **\otimes** (πολλαπλασιασμός), και **$'$** (επόμενος φυσικός),
 - κατηγορηματικό **$<$** (αντ. σε σχέση $x < y$).

- Γλώσσα **Θεωρίας Συνόλων**:
 - Σύμπαν **δυναμοσύνολο συνόλου U** (ή σύνολο με στοιχεία σύνολα)
 - Σταθερά **\emptyset** (αποτ. στο \emptyset),
 - κατηγορηματικό **\subseteq** (αντ. σε σχέση $x \subseteq y$).

Εναλλαγή Ποσοδεικτών

	$P(x, y)$: ο x θαυμάζει τον y	$P(x, y)$: $x \leq y$
$\forall x \exists y P(x, y)$	όλοι θαυμάζουν κάποιον (όχι αναγκαία όλοι τον ίδιο, μπορεί τον εαυτό τους).	κάθε αριθμός έχει κάποιον μεγαλύτερο ή ίσο του.
$\forall x \exists y P(y, x)$	όλοι θαυμάζονται από κάποιον (όχι αναγκαία όλοι από τον ίδιο, μπορεί από εαυτό τους).	κάθε αριθμός έχει κάποιον μικρότερο ή ίσο του.
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall x \forall y P(y, x)$	όλοι θαυμάζουν τους πάντες (και τον εαυτό τους).	για κάθε ζευγάρι αριθμών, ο ένας είναι μικρότερος ή ίσος του άλλου.
$\exists x \forall y P(x, y)$	υπάρχει κάποιος που τους θαυμάζει όλους (και εαυτό του).	υπάρχει αριθμός μικρότερος ή ίσος όλων (κάτω φράγμα).
$\exists x \forall y P(y, x)$	υπάρχει κάποιος που τον θαυμάζουν όλοι (και εαυτός του).	υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος όλων (άνω φράγμα)
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists x \exists y P(y, x)$	υπάρχει ζευγάρι (όχι αναγκαία διαφορετικών) που ο ένας θαυμάζει τον άλλο.	υπάρχουν αριθμοί που ο ένας είναι μικρότερος ή ίσος του άλλου.

$$\neg \exists x \varphi(x) \equiv \forall x \neg \varphi(x)$$

$$\neg \forall x \varphi(x) \equiv \exists x \neg \varphi(x)$$

Εκφραστικότητα Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

□ Δεδομένης ερμηνείας (π.χ. φυσικοί αριθμοί, σύνολα, γραφήματα), διατύπωση προτάσεων – ιδιοτήτων σε πρωτοβάθμια γλώσσα.

- Όλοι οι άνθρωποι θαυμάζουν κάποιον άλλο. $\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(x, y))$
- Υπάρχει κάποιος που δεν θαυμάζει κανέναν άλλο. $\neg \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg P(x, y))$
- Υπάρχει κάποιος που θαυμάζει τον εαυτό του και μόνον αυτόν. $\exists x (P(x, x) \wedge \forall y (P(x, y) \rightarrow x = y))$
- Όλοι θαυμάζονται από κάποιον άλλο. $\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(y, x))$
- Υπάρχει κάποιος που θαυμάζει όλους τους άλλους. $\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow P(x, y))$
- Υπάρχει κάποιος που δεν θαυμάζει κανέναν. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$
- Δεν υπάρχει κανένας άνθρωπος που να τον θαυμάζουν όλοι οι άλλοι. $\neg \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow P(y, x))$
 $\forall x \exists y (x \neq y \wedge \neg P(y, x))$

Εκφραστικότητα

□ Απλές γλωσσικές δομές συνήθως επαρκούν.

□ Κάθε αντικείμενο με ιδιότητα P έχει ιδιότητα Q.

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

■ Ο επόμενος κάθε περιττού αριθμού είναι άρτιος. $\forall x(\text{odd}(x) \rightarrow \text{even}(x'))$

$$\text{even}(x) \equiv \exists y(x = 2 \otimes y)$$

$$\text{όπου } 1 \equiv 0' \text{ και } 2 \equiv (0')'$$

$$\text{odd}(x) \equiv \exists y(x = (2 \otimes y) \oplus 1)$$

■ Κάθε πολλαπλάσιο του 4 είναι άρτιος. $\forall x(\exists y(x = 4 \otimes y) \rightarrow \text{even}(x))$

□ Υπάρχει αντικείμενο με ιδιότητα P και ιδιότητα Q

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

■ Δεν είναι όλοι οι άρτιοι πολλαπλάσια του 4.

$$\exists x(\text{even}(x) \wedge \neg \exists y(x = 4 \otimes y))$$

Εκφραστικότητα

- Υπάρχει **μοναδικό** αντικείμενο με ιδιότητα P.
- Υπάρχει **μέγιστο** (ελάχιστο) στοιχείο με ιδιότητα P.
 - Υπάρχει μοναδικός φυσικός που είναι μικρότερος του 1.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x))$$

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y \leq x))$$

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x \leq y))$$

$$\exists x(x < 1 \wedge \forall y(y < 1 \rightarrow x = y))$$

Εκφραστικότητα: Αριθμοί

- Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος. $\forall x \forall y (\text{odd}(x) \wedge \text{odd}(y) \rightarrow \text{even}(x \oplus y))$
- Ο x διαιρεί ακριβώς τον y : $D(x, y) \equiv \exists z (y = x \otimes z)$
- Ο x είναι μικρότερος ή ίσος του y : $x \leq y \equiv \exists z (y = x \oplus z)$
- Ο x είναι πρώτος αριθμός:
 $\text{prime}(x) \equiv (x \neq 0) \wedge (x \neq 1) \wedge \forall y \forall z (x = y \otimes z \rightarrow (y = x \vee z = x))$

Εκφραστικότητα: Αριθμοί

- Κάθε άρτιος μεγαλύτερος του 4 γράφεται ως άθροισμα δύο περιττών πρώτων αριθμών (εικασία του Goldbach).

$$\forall x((\text{even}(x) \wedge 4 < x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists y \exists z(\text{prime}(y) \wedge \text{odd}(y) \wedge \text{prime}(z) \wedge \text{odd}(z) \wedge x = y \oplus z))$$

- Για κάθε φυσικό αριθμό (έστω n), υπάρχει άλλος (έστω m) που είναι ο μέγιστος μεταξύ εκείνων που το διπλάσιό τους δεν ξεπερνά τον αρχικό (δηλ. το n).

$$\forall n \exists m(2 \otimes m \leq n \wedge \forall k(2 \otimes k \leq n \rightarrow k \leq m))$$

ή ισοδύναμα $\forall n \exists m(P(m, n) \wedge \forall k(P(k, n) \rightarrow k \leq m))$

όπου $P(m, n) \equiv 2 \otimes m \leq n$

Εκφραστικότητα: Σύνολα

- Ερμηνεία με σύμπαν **δυναμοσύνολο** πεπερασμένου **συνόλου** S , 2-μελές κατηγορηματικό σύμβολο Q με ερμηνεία $Q(x, y) \equiv x \subseteq y$, και **σταθερά** c που ερμηνεύεται ως το **κενό σύνολο** (\emptyset).
 - Υπάρχει σύνολο που περιέχει (ως υποσύνολα) κάθε σύνολο. $\exists x \forall y Q(y, x)$
 - Το κενό σύνολο έχει μόνο ένα υποσύνολο, τον εαυτό του. $Q(c, c) \wedge \forall x (Q(x, c) \rightarrow x = c)$
 - Για κάθε ζευγάρι συνόλων υπάρχει κοινό υποσύνολο που είναι το μεγαλύτερο δυνατό (τομή συνόλων).
 $\forall x \forall y \exists z [Q(z, x) \wedge Q(z, y) \wedge \forall w (Q(w, x) \wedge Q(w, y) \rightarrow Q(w, z))]$
 - Για κάθε ζευγάρι συνόλων υπάρχει κοινό υπερσύνολο που είναι το ελάχιστο δυνατό (ένωση συνόλων).
 $\forall x \forall y \exists z [Q(x, z) \wedge Q(y, z) \wedge \forall w (Q(x, w) \wedge Q(y, w) \rightarrow Q(z, w))]$

Εκφραστικότητα

- Τύπος $\varphi(x)$ με **ελεύθερη μεταβλητή** x ορίζει σύνολο
$$A_\varphi = \{ a \in |A| : \varphi(a) \text{ αληθεύει στην } A \}$$
 - $\varphi(x)$: ιδιότητα **στοιχείων της δομής** (όπως κατηγορήματα).
 - Πρόταση ψ : ιδιότητα **της ίδιας της δομής**.
- Να ορίσετε έτσι (i) το \emptyset , (ii) το $\{1\}$, και (iii) το $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
 - (i) $x = x + 1$, (ii) $x = 1$, (iii) $x = x$.
- Να ορίσετε έτσι τα $\{0\}$ και $\{1\}$ (χωρίς σταθερά 0, συνάρτηση ').
 - x είναι ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης: $\forall y(x + y = y)$.
 - Η δομή έχει ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση: $\exists x \forall y(x + y = y)$.
 - x είναι ουδέτερο στοιχείο του πολ/μού: $\forall y(x \times y = y)$.
 - Η δομή έχει ουδέτερο στοιχείο για τον πολ/μό: $\exists x \forall y(x \times y = y)$.

Εκφραστικότητα

- Τύπος $\varphi(x)$ με **ελεύθερη μεταβλητή** x ορίζει σύνολο
$$A_\varphi = \{ a \in |A| : \varphi(a) \text{ αληθεύει στην } A \}$$
 - $\varphi(x)$: ιδιότητα **στοιχείων της δομής** (όπως κατηγορήματα).
 - Αντίστοιχη πρόταση, π.χ. $\exists x \varphi_1(x)$, $\exists x \varphi_0(x)$, $\forall x \varphi_0(x)$: ιδιότητα **της ίδιας της δομής**.
- Ερμηνεία ακεραίων με συναρτήσεις $+$, \times .
- Να ορίσετε έτσι το $\{1\}$, το $\{2\}$, το $\{1, \dots, n\}$, το $\{-1\}$
 - $\varphi_1(x) \equiv \forall y(x \times y = y)$
 - $\varphi_2(x) \equiv \exists y(\varphi_1(y) \wedge x = y + y)$
 - $\varphi_{[n]}(x) \equiv \exists y(\varphi_1(y) \wedge (x = y \vee x = y + y \vee \dots \vee x = y + \dots + y))$
 - $\varphi_0(x) \equiv \forall y(x + y = y)$
 - $\varphi_{-1}(x) \equiv \exists y \exists z(\varphi_1(y) \wedge \varphi_0(z) \wedge x + y = z)$

Σημασιολογική Προσέγγιση

- $A \models \varphi[v]$: στην ερμηνεία A , η **αποτίμηση v επαληθεύει** (ή ικανοποιεί) τον φ .
 - **Αποτίμηση v** καθορίζει τιμές **ελεύθερων μεταβλητών** του φ και μόνο.
- $A \models \varphi$: ο φ ικανοποιείται από κάθε αποτίμηση στην ερμηνεία A .
 - Ο φ **αληθής στην A** ή η ερμηνεία A αποτελεί **μοντέλο** για τον φ .
- $\models \varphi$: ο φ ικανοποιείται σε κάθε ερμηνεία.
 - Ο φ είναι (λογικά) **έγκυρος** (αντίστοιχο ταυτολογίας).
 - Ταυτολογίες «δίνουν» λογικά έγκυρους τύπους με συντακτική αντικατάσταση.
- **Εγκυρότητα / ικανοποιησιμότητα / αλήθεια φ** ελέγχεται με εφαρμογή του **ορισμού αλήθειας του Tarski**.

Ορισμός Tarski

- Ερμηνεύει λογικούς συνδέσμους και ποσοδείκτες.
- Ορίζει ότι ένας τύπος φ αληθεύει (σε μια ερμηνεία A , για μια αποτίμηση v) ανν το νόημα του εκφράζει μια **αλήθεια** στην A .
- Η έννοια $A \models \varphi[v]$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
 - $A \models (x = y)[v]$ ανν $(v(x) = v(y))$.
 - $A \models Q(x_1, \dots, x_n)[v]$ ανν $(v(x_1), \dots, v(x_n)) \in Q^A$.
 - $A \models \neg\psi[v]$ ανν $(\text{δεν ισχύει ότι } A \models \psi[v])$.
 - $A \models (\psi \wedge \chi)[v]$ ανν $(A \models \psi[v] \text{ και } A \models \chi[v])$.
 - $A \models (\psi \vee \chi)[v]$ ανν $(A \models \psi[v] \text{ ή } A \models \chi[v])$.
 - $A \models (\psi \rightarrow \chi)[v]$ ανν $(\text{όταν } A \models \psi[v], \text{ τότε } A \models \chi[v])$.
 - $A \models (\psi \leftrightarrow \chi)[v]$ ανν $(A \models \psi[v] \text{ ανν } A \models \chi[v])$.
 - $A \models \forall x\psi[v]$ ανν $(\text{για κάθε } a \in |A|, A \models \psi[v(x|a)])$.
 - $A \models \exists x\psi[v]$ ανν $(\text{υπάρχει } a \in |A| \text{ τέτοιο ώστε } A \models \psi[v(x|a)])$.

Παραδείγματα

- Δεν ακολουθούμε τον φορμαλισμό του ορισμού Tarski, αλλά την ουσία του.
- Ελέγχουμε αν πρόταση αληθεύει σε **συγκεκριμένη** ερμηνεία.
 - Απλά «αποκωδικοποιούμε» την πρόταση (στην συγκεκριμένη ερμηνεία) και **εξηγούμε πειστικά** αν αληθεύει ή όχι.
- Αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις στη δομή των **φυσικών** για $c = 0$ και $P(x, y) \equiv x \leq y$; Στην δομή των **ακεραίων**;
 - (α) $\forall x \forall y (P(x, c) \wedge P(c, y) \rightarrow P(x, y))$
 - (β) $\forall x (P(x, c) \rightarrow x = c)$
 - (α) αληθεύει σε **φυσικούς** και **ακέραιους**, (β) μόνο σε **φυσικούς**.

Ερώτηση

- Τι δηλώνουν οι παρακάτω προτάσεις;
 - Αληθεύουν σε πεπερασμένο σύμπαν;
 - Αληθεύουν σε άπειρο σύμπαν;

$$\begin{aligned} & \forall x R(x, x) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(y, x)) \wedge \\ & \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall x R(x, x) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x)) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & \exists x \forall y R(x, y) \wedge \\ & \exists x \forall y R(y, x) \end{aligned}$$

Παραδείγματα

- Δίνεται συγκεκριμένη πρόταση και ζητείται δομή που να (μην) την ικανοποιεί.
 - Δομή που ικανοποιεί παρακάτω προτάσεις ταυτόχρονα:
 $\forall x[Q(c, x) \rightarrow \exists y(x = f(y))] \quad \neg \exists x(f(x) = c)$
 - Δοκιμάζουμε φυσικούς, με $c = 0$, $Q(x, y) \equiv x < y$, και $f(x) = x+1$.
 $\forall x[x > 0 \rightarrow \exists y(y = x - 1)] \quad \neg \exists x(x + 1 = 0)$
 - Νδο παρακάτω πρόταση δεν είναι λογικά έγκυρη περιγράφοντας ερμηνεία της Γλώσσας Θ . Αριθμών που δεν την ικανοποιεί.
 $\forall x \exists y Q(x, y) \rightarrow \exists y \forall x Q(x, y)$
 - Αν $Q(x, y) \equiv x < y$, υπόθεση αληθής και συμπέρασμα ψευδές!

Παραδείγματα

- Συνολοθεωρητική ερμηνεία με κατηγορηματικό συμβολο $Q(x, y)$ που αληθεύει αν $x \in y$ (δηλ. το σύνολο y περιέχει ως στοιχείο το σύνολο x).
- Να ορίσετε το σύμπαν $|A|$ ώστε να αληθεύει η 1^η από τις παρακάτω προτάσεις και να μην αληθεύει η 2^η.
$$\exists y \forall x \neg Q(x, y) \qquad \forall x \forall y [x = y \leftrightarrow \forall z (Q(z, x) \leftrightarrow Q(z, y))]$$
- Για να αληθεύει η 1^η, αρκεί να υπάρχει στο σύμπαν σύνολο που δεν περιέχει (ως στοιχείο) κανένα σύνολο που ανήκει στο σύμπαν.
 - Αυτό αληθεύει αν π.χ. $\emptyset \in |A|$.
- Για να μην αληθεύει η 2^η, αρκεί να υπάρχουν στο σύμπαν δύο διαφορετικά σύνολα που να περιέχουν (ως στοιχεία) τα ίδια ακριβώς σύνολα του συμπαντος.
 - Π.χ. $|A| = \{ \emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \}$

Παραδείγματα

- Ελάχιστο και μέγιστο πλήθος στοιχείων μιας δομής που αποτελεί μοντέλο για τις παρακάτω προτάσεις:
 - $\exists x \exists y (x \neq y) \quad |A| \geq 2$
 - $\forall x \forall y (x = y) \quad |A| = 1$
 - $\forall x \exists y \exists z \exists w (x \neq y \wedge x \neq z \wedge x \neq w) \quad |A| \geq 2$
 - $\exists y \exists z \exists w (y \neq z \wedge z \neq w \wedge y \neq w) \quad |A| \geq 3$
 - $\forall x \forall y \forall w (x = y \vee y = w \vee x = w) \quad |A| \in \{1, 2\}$

Λογική Εγκυρότητα

- Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι λογικά έγκυρες:
 - (i) $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
 - (ii) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$
- Ότι μια πρόταση **δεν είναι λογικά έγκυρη** αποδεικνύεται με «αντιπαράδειγμα» (ερμηνεία που δεν την ικανοποιεί):
 - Για την (i), φυσικοί αριθμοί, $P(x)$ δηλώνει ότι x άρτιος, $Q(x)$ δηλώνει ότι x περιττός.
- **Λογική εγκυρότητα** αποδεικνύεται με εφαρμογή **ορισμού Tarski**.
 - Για αυθαίρετη ερμηνεία A , πρόταση (ii) δηλώνει ότι: αν για **κάθε** στοιχείο $a \in |A|$, $A \models P(a)$ και $A \models Q(a)$, τότε για **κάθε** στοιχείο $a \in |A|$, $A \models P(a)$ ή $A \models Q(a)$.
 - Αυτό αληθεύει για **κάθε** δομή A .

Λογική Εγκυρότητα

- $N\delta o \models \varphi(c) \rightarrow \exists x\varphi(x)$
 - Θεωρούμε αυθαίρετη δομή A . $A \models \varphi(c) \rightarrow \exists x\varphi(x) \dots$
 - ... ανν όταν $A \models \varphi(c)$, υπάρχει $a \in |A|$ τ.ω. $A \models \varphi(a)$.
 - Ισχύει, αφού φ αληθεύει για στοιχείο όπου έχει αποτιμηθεί c .
- $N\delta o \models \exists x\forall yP(x, y) \rightarrow \forall y\exists xP(x, y)$
 - Έστω αυθαίρετη δομή A . $A \models \exists x\forall yP(x, y) \rightarrow \forall y\exists xP(x, y) \dots$
 - ανν όταν (i) υπάρχει $a \in |A|$ τ.ω. για κάθε $\beta \in |A|$, $A \models P(a, \beta)$, τότε (ii) για κάθε $\gamma \in |A|$, υπάρχει $\delta \in |A|$ τ.ω. $A \models P(\delta, \gamma)$.
 - Ισχύει, αφού για κάθε $\gamma \in |A|$, $A \models P(a, \gamma)$ λόγω υπόθεσης.

Λογική Εγκυρότητα

- $N\delta o \models \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$
 - Θεωρούμε αυθαίρετη δομή A . Πρέπει νδο:
 - Αν (i) υπάρχει $a \in |A|$: $A \models P(a) \rightarrow Q(a)$,
τότε (ii) αν για κάθε $\beta \in |A|$, $A \models P(\beta)$,
τότε (iii) υπάρχει $\gamma \in |A|$: $A \models Q(\gamma)$.
 - Αρκεί νδο αν ισχύουν τα (i) και (ii), τότε ισχύει και το (iii).
 - Λόγω (i): υπάρχει $a \in |A|$: $A \models P(a) \rightarrow Q(a)$.
 - Λόγω (ii): $A \models P(a)$.
 - Άρα $A \models Q(a)$.
 - Συνεπώς, αν ισχύουν τα (i) και (ii), υπάρχει στοιχείο του $|A|$ για το οποίο αληθεύει το Q στην ερμηνεία A .

Λογική Συνεπαγωγή

- Έστω οι τύποι (1) $\forall x(f(x) = x \leftrightarrow Q(x))$, και
(2) $\forall x(f(x) = x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$.

(α) Να βρείτε ποιος τύπος συνεπάγεται λογικά τον άλλο, και
(β) νδο οι τύποι δεν είναι λογικά ισοδύναμοι.

- Θδο (1) \models (2) (αλλά όχι το αντίστροφο).

- Έστω αυθαίρετη ερμηνεία A . Από ορισμό Tarski, αρκεί νδο:

- Αν (i) για κάθε $a \in |A|$, $A \models f(a) = a$ ανν $A \models Q(a)$,
τότε (ii.1) για κάθε $\beta \in |A|$, $A \models f(\beta) = \beta$ ανν
(ii.2) για κάθε $\gamma \in |A|$, $A \models Q(\gamma)$.

- Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- Ισχύει (ii.2), δηλ. για κάθε $\gamma \in |A|$, $A \models Q(\gamma)$ ανν,
λόγω (i), για κάθε $\beta \in |A|$, $A \models f(\beta) = \beta$, ανν ισχύει (ii.1).
- Δεν ισχύει (ii.2), δηλ. υπάρχει $\delta \in |A|$, $A \models \neg Q(\delta)$, ανν,
λόγω (i), υπάρχει $\delta \in |A|$, $A \models f(\delta) \neq \delta$, ανν δεν ισχύει (ii.2).

Λογική Συνεπαγωγή

- Έστω οι τύποι (1) $\forall x(f(x) = x \leftrightarrow Q(x))$, και
(2) $\forall x(f(x) = x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$.

(α) Να βρείτε ποιος τύπος συνεπάγεται λογικά τον άλλο, και
(β) νδο οι τύποι δεν είναι λογικά ισοδύναμοι.

- Ερμηνεία A που επαληθεύει τον (2) αλλά όχι τον (1).
- $|A| = \{a, \beta\}$, $f(a) = a$, $f(\beta) = a$, και $Q(a) \Psi$, $Q(\beta) A$.
- A μοντέλο για τον (2):
 - $A \models \neg \forall x(f(x) = x)$ και $A \models \neg \forall xQ(x)$
- A όχι μοντέλο για τον (1):
 - Υπάρχει στοιχείο του $|A|$, το a , για το οποίο $f(a) = a$ αλλά $Q(a)$ δεν αληθεύει.

Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

- Για κάθε τύπο φ , μπορούμε να βρούμε λογικά ισοδύναμο τύπο $\varphi^* \equiv Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n \varphi'(x_1, \dots, x_n)$ όπου Q_i ποσοδείκτες και $\varphi'(x_1, \dots, x_n)$ ανοικτός τύπος.
 - φ^* αποτελεί **Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή** (ΚΠΜ) φ .
- Για υπολογισμό ΚΠΜ, χρησιμοποιούμε:
 - Νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών (μόνο αν x **δεν** εμφανίζεται ελεύθερη στον φ):
 - $\forall x\psi(x) \rightarrow \varphi \equiv \exists x(\psi(x) \rightarrow \varphi)$
 - $\exists x\psi(x) \rightarrow \varphi \equiv \forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi)$
 - $\varphi \rightarrow \forall x\psi(x) \equiv \forall x(\varphi \rightarrow \psi(x))$
 - $\varphi \rightarrow \exists x\psi(x) \equiv \exists x(\varphi \rightarrow \psi(x))$
 - Νόμους άρνησης ποσοδεικτών:
 - $\neg \exists x\varphi(x) \equiv \forall x\neg\varphi(x)$
 - $\neg \forall x\varphi(x) \equiv \exists x\neg\varphi(x)$
 - Νόμους κατανομής ποσοδεικτών:
 - $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)$
 - $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$

Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

□ Να βρείτε μια ΚΠΜ του τύπου

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x, y) \rightarrow \neg \exists z Q(x, z)) \rightarrow (\forall x R(x) \wedge \forall y S(y)) \\ \equiv & \forall x(P(x, y) \rightarrow \neg \exists z Q(x, z)) \rightarrow \forall w(R(w) \wedge S(w)) \\ \equiv & \forall w[\forall x(P(x, y) \rightarrow \neg \exists z Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ \equiv & \forall w[\forall x(P(x, y) \rightarrow \forall z \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ \equiv & \forall w \exists x[(P(x, y) \rightarrow \forall z \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ \equiv & \forall w \exists x[\forall z(P(x, y) \rightarrow \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ \equiv & \forall w \exists x \exists z[(P(x, y) \rightarrow \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \end{aligned}$$