

# Σχέσεις Ισοδυναμίας

---

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

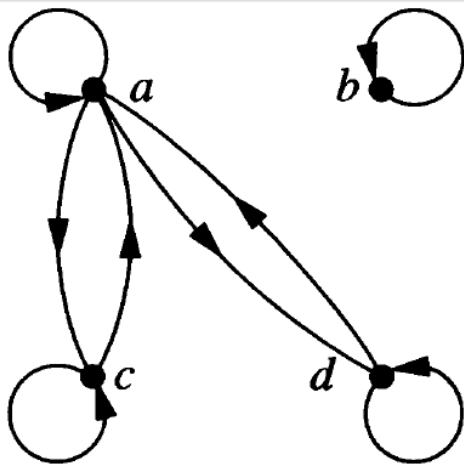
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

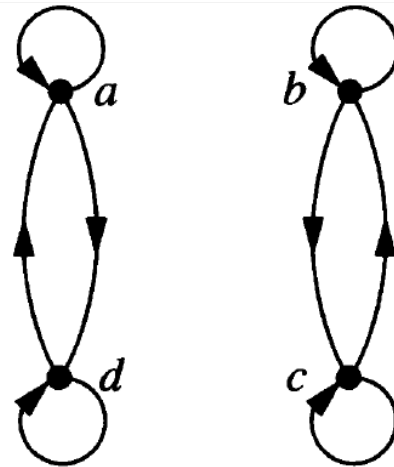


# Σχέση Ισοδυναμίας

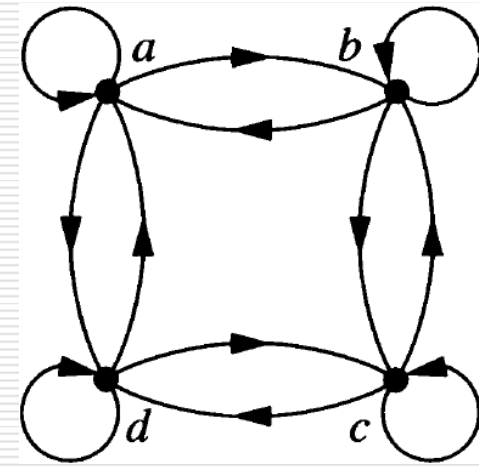
- Σχέση **Ισοδυναμίας**: ανακλαστική, συμμετρική, και μεταβατική.
  - Άνθρωποι: ίδιο επώνυμο, κατοικούν ίδια πολυκατοικία, ...
  - Πραγματικοί αριθμοί:  $|a| = |b|$ ,  $a - b$  είναι ακέραιος, ...
  - Φυσικοί αριθμοί:  $a \equiv b \pmod{n}$
- Ποιες από τις παρακάτω είναι σχέσεις ισοδυναμίας;



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Κλάση Ισοδυναμίας

---

- Θεωρούμε σχέση ισοδυναμίας  $R \subseteq A \times A$ .
- **Κλάση ισοδυναμίας** στοιχείου  $a$  (συμβ.  $[a]_R$  ή απλά  $[a]$ ):
  - $[a]_R = \{\beta \in A : (a, \beta) \in R\}$  (στοιχεία που σχετίζονται με  $a$ ).
  - **Αντιπρόσωπος** κλάσης  $[a]_R$ : οποιοδήποτε **στοιχείο**  $\beta \in [a]_R$ .
  - Ανακλαστική:  $a \in [a]_R$ .
  - Συμμετρική: Αν  $\beta \in [a]_R$ , τότε και  $a \in [\beta]_R$ .
  - Μεταβατική: Αν  $\beta, \gamma \in [a]_R$ , τότε  $(\beta, \gamma) \in R$ .

# Διαμέριση ως Σχέση Ισοδυναμίας

---

- Διαμέριση  $A$ : συλλογή μη κενών υποσυνόλων  $\{A_1, \dots, A_k\}$ :
  - Ανά δύο ξένα μεταξύ τους ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  για κάθε  $i \neq j$ ).
  - Ένωσή τους είναι το  $A$  ( $A_1 \cup \dots \cup A_k = A$ ).
  - $A_1, \dots, A_k$  καλούνται σύμπλοκα της διαμέρισης.
- Αντιστοιχία μεταξύ διαμερίσεων συνόλου  $A$  και σχέσεων ισοδυναμίας στο  $A$ .
- Διαμέριση  $\{A_1, \dots, A_k\}$ . Σχέση  $R = \{(a, \beta): a, \beta \in A_i\}$  αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.
  - Ανακλαστική και συμμετρική (προφανές από ορισμό  $R$ ).
  - Μεταβατική: Αν  $a, \beta \in A_i$  και  $\beta, \gamma \in A_i$ , τότε και  $a, \gamma \in A_i$ .

# Σχέση Ισοδυναμίας ως Διαμέριση

- Κλάσεις σχέσης ισοδυναμίας  $R$  αποτελούν διαμέριση  $A$ .
- Για κάθε  $a, \beta \in A$ , είτε  $[a] = [\beta]$  είτε  $[a] \cap [\beta] = \emptyset$ ,  
(και βέβαια  $[a], [\beta]$  μη κενά).
  - Απαγωγή σε άτοπο: έστω  $[a] \neq [\beta]$  και  $[a] \cap [\beta] \neq \emptyset$ .
  - Χβτγ., υποθέτουμε ότι  $[\beta] - [a] \neq \emptyset$ .
  - Στοιχείο  $\gamma \in [\beta]$ , αλλά  $\gamma \notin [a]$ .
  - Θεωρούμε στοιχείο  $\delta \in [a] \cap [\beta]$ .
  - $(\delta, \beta) \in R$ , αφού  $(\beta, \delta) \in R$  και συμμετρική, και  $(\beta, \gamma) \in R$ .
    - Μεταβατική:  $(\delta, \gamma) \in R$ .
  - $(a, \delta) \in R$  και  $(\delta, \gamma) \in R$ .
    - Μεταβατική  $(a, \gamma) \in R$ . Δηλαδή  $\gamma \in [a]$ , άτοπο!
- Διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας: μη κενές, ξένες ανά δυο, και ως ένωση έχουν  $A$  (κάθε στοιχείο ανήκει σε κλάση).

# Εκλέπτυνση Ισοδυναμίας

---

- $R_1$  και  $R_2$  σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο  $A$ ,  
 $\pi_1$  και  $\pi_2$  αντίστοιχες διαμερίσεις του  $A$ .
- $\pi_1$  εκλέπτυνση της  $\pi_2$  ( $\pi_1 \leq \pi_2$ ) αν  $R_1 \subseteq R_2$ .
  - Στοιχεία στο ίδιο σύμπλοκο  $\pi_1$  ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο  $\pi_2$ .
  - Π.χ. κατοικούν στο ίδιο διαμέρισμα, στην ίδια πολυκατοικία, στο ίδιο οικοδομικό τετράγωνο, στην ίδια πόλη.
- Γινόμενο  $\pi_1 \cdot \pi_2$ : διαμέριση της σχέσης ισοδυναμίας  $R_1 \cap R_2$ .
  - Στοιχεία στο ίδιο σύμπλοκο  $\pi_1$  και  $\pi_2$ , στο ίδιο σύμπλοκο  $\pi_1 \cdot \pi_2$
  - Γινόμενο  $\pi_1 \cdot \pi_2$  αποτελεί εκλέπτυνση των  $\pi_1$  και  $\pi_2$ .
- Άθροισμα  $\pi_1 + \pi_2$ : διαμέριση της σχέσης ισοδυναμίας  $(R_1 \cup R_2)^*$ .
  - Στοιχεία στο ίδιο σύμπλοκο  $\pi_1$  ή  $\pi_2$ , στο ίδιο σύμπλοκο  $\pi_1 + \pi_2$
  - $\pi_1$  και  $\pi_2$  αποτελούν εκλεπτύνσεις του αθροίσματος  $\pi_1 + \pi_2$ .