

# Γεννήτριες Συναρτήσεις

---

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Αναπαράσταση Ακολουθιών

- **Ακολουθία:** αριθμητική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{N}$ .
- Με γενικό (ή «κλειστό») τύπο  $a_n$ :  $n$ -οστός όρος συναρτήσει  $n$ .
- Κωδικοποίηση σε δυναμοσειρά μιας (πραγματικής) μεταβλητής  $x$ .
- Γεννήτρια Συνάρτηση (ΓΣ)  $A(x)$  ακολουθίας  $\mathbf{a}$ :  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 
  - Συντελεστής του  $x^n$  αντιστοιχεί σε  $n$ -οστό όρο ακολουθίας  $\mathbf{a}$ .
  - Επιλέγουμε διάστημα τιμών  $x$  ώστε σειρά να συγκλίνει (**πάντα!**).
  - Έτσι θεωρούμε ότι  $A(x)$  άπειρα παραγωγίσιμη (αναλυτική).  
Παραγωγίζουμε/ολοκληρώνουμε την  $A(x)$  ως πεπερασμένο άθροισμα.
- Κάθε ακολουθία  $\mathbf{a}$  αντιστοιχεί σε μοναδική ΓΣ  $A(x)$ .
- ΓΣ  $A(x)$  αντιστοιχεί σε μοναδική ακολουθία:  $a_n = (1/n!)A^{(n)}(0)$
- Μετασχηματισμός και «αλγεβρικός» χειρισμός ακολουθιών και επίλυση των προβλημάτων που κωδικοποιούν.

# Παραδείγματα

- ΓΣ ακολουθίας  $1, 1, 1, 1, \dots$  :  $1/(1-x)$
- ΓΣ ακολουθίας  $a_n = b \lambda^n$  :  $b/(1-\lambda x)$
- ΓΣ για **πεπερασμένες** ακολουθίες (υπόλοιποι όροι θεωρούνται 0).
  - ΓΣ ακολουθίας  $0, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ :  $x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6$
  - ΓΣ ακολουθίας  $a_k = C(n, k)$ :  $(1+x)^n$
- ΓΣ ακολουθίας  $a_n = n+1$  :  
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$
  - ΓΣ ακολουθίας  $\beta_n = n$  :  $B(x) = x/(1-x)^2$
- Ακολουθία που αντιστοιχεί σε ΓΣ  $A(x) = 5/(1-4x)$ :  $a_n = 5 \cdot 4^n$

# Παραδείγματα

- Ακολουθία αντιστοιχεί σε ΓΣ  $A(x) = 1/(1+x)$ ;
  - Γενικευμένο δυωνυμικό ανάπτυγμα (όταν  $n$  δεν είναι φυσικός):

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k$$

- Ειδικότερα, αν  $n$  φυσικός:  $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$
- Δηλαδή η  $1/(1-x)^n$  είναι η ΓΣ για συνδυασμούς  $k$  από  $n$  αντικείμενα με επανάληψη (ή διανομή  $k$  ίδιων αντικειμένων σε  $n$  διακ. υποδοχές).

- Με βάση γενικευμένο δυωνυμικό ανάπτυγμα,

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k$$

- Άρα η ΓΣ  $A(x) = 1/(1+x)$  αντιστοιχεί στην ακολουθία  $a_n = (-1)^n$

# Πράξεις Ακολουθιών

## □ Πράξεις μεταξύ ακολουθιών:

■ Διαβάθμιση με συντελεστή  $c$ :  $(c\alpha)_n = c\alpha_n$

■ Γραμμικός συνδυασμός:  $(c\alpha + d\beta)_n = c\alpha_n + d\beta_n$

■ Δεξιά ολίσθηση κατά  $k$  θέσεις:

$$(S^k \alpha)_n = \begin{cases} 0 & \text{για } n = 0, \dots, k-1 \\ \alpha_{n-k} & \text{για } n \geq k \end{cases}$$

■ Αριστερή ολίσθηση κατά  $k$  θέσεις:  $(S^{-k} \alpha)_n = \alpha_{n+k}$

■ Ακολουθία μερικών αθροισμάτων:  $\gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k$

■ Ακολουθία συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων:  $\delta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k$

■ Ευθεία διαφορά:  $(\Delta \alpha)_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$

■ Ανάστροφη διαφορά (ολίσθ. ευθείας 1 θέση δεξιά):  $(\nabla \alpha)_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$

■ Συνέλιξη:  $(\alpha * \beta)_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}$

# Βασικές Ιδιότητες

## □ Γραμμική ιδιότητα:

■ Η ακολουθία  $c\mathbf{a} + d\mathbf{b}$  έχει ΓΣ την  $c A(x) + d B(x)$ .

■ Η ΓΣ  $\frac{10-38x}{1-6x+8x^2} = \frac{1}{1-4x} + \frac{9}{1-2x}$  έχει ακολουθία την  $4^n + 9 \cdot 2^n$

■ Η ΓΣ  $\frac{9-47x}{1-10x+21x^2} = \frac{5}{1-3x} + \frac{4}{1-7x}$  έχει ακολουθία την  $5 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n$

## □ Ιδιότητα ολίσθησης:

■ Η ακολουθία  $S^k \mathbf{a}$  έχει ΓΣ την  $x^k A(x)$ , αφού:

$$x^k A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{n+k} = \sum_{n=0}^{k-1} 0x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{n-k} x^n$$

■ Π.χ.  $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots$  έχει ΓΣ την  $x^4/(1-x)$

$0, 0, 1, 2, 4, \dots, 2^{n-2}$  έχει ΓΣ την  $x^2/(1-2x)$

■ Η ακολουθία  $S^{-k} \mathbf{a}$  έχει ΓΣ την  $x^{-k} \left( A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x^i \right)$

■ Π.χ. η ακολουθία  $\alpha_n = 2^{n+3}$  έχει ΓΣ την

$$x^{-3} \left[ \frac{1}{1-2x} - 1 - 2x - 4x^2 \right] = \frac{8}{1-2x}$$

# Βασικές Ιδιότητες

- Μερικών αθροισμάτων:  $\gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k$ 
  - Παρατηρούμε ότι  $\alpha_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$
  - Άρα  $A(x) = \Gamma(x) - x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x) = A(x) / (1-x)$ .
  - Π.χ.  $\gamma_n = n+1$  είναι ακολουθία μερικών αθροισμάτων της  $\alpha_n = 1$ .
    - Άρα έχει ΓΣ την  $\Gamma(x) = 1/(1-x)^2$
  - Ποια είναι η ΓΣ της  $\beta_n = n(n+1)/2$ ;
    - Η  $\beta_n$  αποτελεί την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της  $\delta_n = n$ , η οποία έχει ΓΣ την  $D(x) = x/(1-x)^2$ .
    - Άρα έχει ΓΣ την  $B(x) = x/(1-x)^3$
- Συνέλιξη  $\alpha * \beta$  έχει ΓΣ την  $A(x) B(x)$ .
  - Ο συντελεστής του  $x^n$  στο  $A(x) B(x)$  είναι  $(\alpha * \beta)_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}$
  - Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας  $\alpha_n = \sum_{k=0}^n 3^k 2^{n-k}$ 
    - Από ιδιότητα συνέλιξης,  $A(x) = 1/[(1-3x)(1-2x)]$

# Βασικές Ιδιότητες

□ Ιδιότητα της Κλίμακας:

- Η ακολουθία  $\gamma_n = n a_n$  έχει ΓΣ την  $\Gamma(x) = x A'(x)$ , αφού

$$\Gamma(x) = x A'(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n x^n)' = x \sum_{n=0}^{\infty} n \alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n \alpha_n) x^n$$

- Η ακολουθία  $\delta_n = a_n / (n+1)$  έχει ΓΣ την  $\Delta(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(z) dz$

$$\Delta(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(z) dz = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \alpha_n z^n dz = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} x^n$$



# Παραδείγματα

---

- Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας  $\beta = c a + d$ ;
  - $B(x) = c A(x) + d/(1-x)$
- Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας  $\beta_n = c^n a_n$  ;
  - $B(x) = A(cx)$
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την  $A(x) = 4x + 2/(1-3x)$  ;
  - $a_0 = 2, a_1 = 10, a_n = 2 \cdot 3^n, \text{ για } n \geq 2.$
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την  $A(x) = 2/(1 - 4x^2)$  ;
  - Ανάλυση σε κλάσματα:  $A(x) = 1/(1-2x) + 1/(1+2x)$
  - Ακολουθία  $a_n = 2^n + (-2)^n$
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την  $A(x) = \frac{22x^3 - 9x^2 - 14x - 1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}$ 
  - Ανάλυση σε κλάσματα:  $A(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+3x} - \frac{1}{1-2x} - \frac{2}{(1-2x)^2}$
  - Ακολουθία  $a_n = (-1)^n + (-3)^n - 2^n - (n+1)2^{n+1}$

# Εφαρμογές

---

- ... των ΓΣ είναι πολλές και σημαντικές. Μεταξύ άλλων:
  - Υπολογισμός αθροισμάτων.
  - Επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής.
  - Επίλυση αναδρομικών εξισώσεων.
- Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων:
  - Διατύπωση με βάση μια ακολουθία (ή συνδυασμό ακολουθιών) ώστε ο «κλειστός» τύπος για τον  $n$ -οστό όρο να δίνει τη λύση.
  - Υπολογισμός της ΓΣ της ακολουθίας (με βάση ιδιότητες ΓΣ).
  - Ανάπτυγμα ΓΣ και υπολογισμός έκφρασης για  $n$ -οστό όρο.
- Υπολογισμός αθροίσματος  $\sum_{k=0}^n 3^k 2^{n-k}$ 
  - ΓΣ αντίστοιχης ακολουθίας  $\mathbf{a}$  είναι η  $A(x) = 1/[(1-3x)(1-2x)]$
  - Ανάλυση σε κλάσματα:  $A(x) = 3/(1-3x) - 2/(1-2x)$
  - Άθροισμα =  $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

# Υπολογισμός Αθροισμάτων

- Υπολογισμός αθροίσματος  $\sum_{k=0}^n k^2$ 
  - Ακολουθία  $a_n = n$  έχει ΓΣ την  $A(x) = x/(1-x)^2$
  - Ιδιότητα κλίμακας:  $\beta_n = n^2$  έχει ΓΣ την  $B(x) = x(1+x)/(1-x)^3$
  - Άθροισμα αντιστοιχεί στην ακολουθία μερικών αθροισμάτων της ακολουθίας  $\beta$ , η οποία έχει ΓΣ την  $\Gamma(x) = x(1+x)/(1-x)^4$
  - Χρησιμοποιούμε  $(1-x)^{-4} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{4+k-1}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$
  - ... και έχουμε:  $\frac{x^2}{(1-x)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{3} x^k$  και  $\frac{x}{(1-x)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{3} x^k$
  - Άθροισμα =  $\binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$
- Ομοίως να υπολογισθεί το άθροισμα  $\sum_{k=0}^n k^3$

# Προβλήματα Συνδυαστικής

- **Συνήθειες ΓΣ** χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση και επίλυση προβλημάτων **συνδυασμών**.
  - Για κάθε αντικείμενο  $A$ , κωδικοποιούμε στον εκθέτη της μεταβλητής  $x$  πόσες φορές μπορούμε να το επιλέξουμε.
    - $1+x+x^2+x^3+\dots+x^p$  : μπορούμε να επιλέξουμε το  $A$   $0, 1, \dots, p$  φορές (μπορεί άπειρο άθροισμα).
    - Σε αυτή τη φάση κωδικοποιούνται οι περιορισμοί.
    - Απαριθμητής για (επιλογές) αντικειμένου  $A$ .
  - Απαριθμητές για διαφορετικά αντικείμενα πολλαπλασιάζονται (κανόνας γινομένου) και δίνουν ΓΣ για συνδυασμούς από  $n$  αντικείμενα.
  - Ο συντελεστής του  $x^k$  στη ΓΣ αντιστοιχεί στον #συνδυασμών  $k$  από  $n$  αντικείμενα (υπό τους περιορισμούς που έχουμε θέσει).
  - Η ΓΣ κωδικοποιεί όλα τα ενδεχόμενα του πειράματος και #τρόπων να προκύψει κάθε ενδεχόμενο.

# Παραδείγματα

---

- Συνδυασμοί από  $n$  αντικείμενα χωρίς επαναλήψεις:
  - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο:  $1+x$
  - ΓΣ  $(1+x)^n$  . Συντελεστής  $x^k = C(n, k)$ .
- Συνδυασμοί από  $n$  αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις:
  - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο:  $1+x+x^2+x^3+\dots = 1/(1-x)$
  - ΓΣ  $1/(1-x)^n$  . Συντελεστής  $x^k = C(n+k-1, k)$ .
- Συνδυασμοί από  $n$  αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις ώστε κάθε αντικείμενο να επιλεγεί τουλάχιστον 1 φορά:
  - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο:  $x+x^2+x^3+\dots = x/(1-x)$
  - ΓΣ  $x^n/(1-x)^n$  . Συντελεστής  $x^k = C(k-1, n-1)$ .

# Παραδείγματα

- # λύσεων εξίσωσης  $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 30$  στους **φυσικούς** αν  $z_1$  άρτιος, θετικός  $\leq 10$ ,  $z_2$  περιττός  $\leq 11$ ,  $3 \leq z_3 \leq 10$ ,  $0 \leq z_4 \leq 15$ .
  - $A(x) = (x^2 + x^4 + \dots + x^{10})(x + x^3 + \dots + x^{11})(x^3 + x^4 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + \dots + x^{15})$
  - Ζητούμενο δίνεται από συντελεστή  $x^{30}$  που είναι **185**.
  - Ο συντελεστής του  $x^{30}$  στην  $A(x)$  **δεν ταυτίζεται** με αυτόν στην  $A'(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(x + x^3 + x^5 + \dots)(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$
- Κέρματα 20 λεπτών, 50 λεπτών, 1 ευρώ και 2 ευρώ.  
Συνδυασμοί με συνολική **αξία n ευρώ** ώστε τουλάχιστον ένα κέρμα από κάθε είδος.
  - Κωδικοποιούμε στον εκθέτη την αξία των κερμάτων (σε λεπτά).
  - $A(x) = (x^{20} + x^{40} + \dots)(x^{50} + x^{100} + \dots)(x^{100} + x^{200} + \dots)(x^{200} + x^{400} + \dots)$
  - Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του  $x^{100n}$

# Παραδείγματα

□ #διανομών  $2n+1$  ίδιων μπαλών σε 3 διακεκριμένες υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή να έχει  $\leq n$  μπάλες.

■ Η ΓΣ είναι  $A(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)^3 = (1-x^{n+1})^3/(1-x)^3$

■ Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του  $x^{2n+1}$

■ Με πράξεις:

$$\begin{aligned} A(x) &= (1 - 3x^{n+1} + 3x^{2n+2} - x^{3n+3}) \frac{1}{(1-x)^3} \\ &= (1 - 3x^{n+1} + 3x^{2n+2} - x^{3n+3}) \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k \right) \end{aligned}$$

■ Ο συντελεστής του  $x^{2n+1}$  είναι

$$\binom{2n+3}{2} - 3 \binom{n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

# Παραδείγματα

---

- ΓΣ για τη διανομή 20 μαρκαδόρων, 6 μαύρων, 10 πράσινων, και 4 κόκκινων, σε 2 καθηγητές ώστε κάθε καθηγητής να πάρει 10 μαρκαδόρους και τουλάχιστον 1 από κάθε χρώμα.
  - Διανομή στον 1<sup>ο</sup> καθηγητή (σύμφωνα με περιορισμούς) καθορίζει τι θα πάρει ο 2<sup>ος</sup> καθηγητής με μοναδικό τρόπο.
  - Αρκεί να διατυπώσουμε τη ΓΣ για τον 1<sup>ο</sup> καθηγητή.
  - $(x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x+x^2+\dots+x^9)(x+x^2+x^3)$
  - Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του  $x^{10}$  που είναι 15.



# Παραδείγματα

---

- 100 (μη διακεκριμένοι) επιβάτες κατεβαίνουν σε 4 (διακεκριμένες) στάσεις. Γεννήτρια Συνάρτηση όταν:
  - Δεν υπάρχουν περιορισμοί.
    - #ακεραίων λύσεων της  $z_1+z_2+z_3+z_4 = 100$  με  $z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0$ .
    - $(1+x+x^2+x^3+\dots)^4 = 1/(1-x)^4$
    - Ζητούμενο δίνεται από συντελεστή  $x^{100}$  που είναι  $C(103, 3)$
  - #επιβ. 3<sup>η</sup> στάση  $\geq$  #επιβ. 2<sup>η</sup> στάση  $\geq$  #επιβ. 1<sup>η</sup> στάση.
    - Πρέπει  $z_2 = z_1 + \kappa$ ,  $\kappa \geq 0$ , και  $z_3 = z_2 + \lambda = z_1 + \kappa + \lambda$ ,  $\lambda \geq 0$ .
    - #ακεραίων λύσεων της  $3z_1 + 2\kappa + \lambda + z_4 = 100$  με  $z_1, \kappa, \lambda, z_4 \geq 0$ .
    - $(1+x^3+x^6+\dots+x^{99})(1+x^2+x^4+\dots+x^{100})(1+x+x^2+\dots+x^{100})^2$
    - Ζητούμενο δίνεται από συντελεστή  $x^{100}$  που είναι 30787

# Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

- ... για προβλήματα διατάξεων.
  - Διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένες θέσεις.
  - Αναζητούμε τον συντελεστή τον συντελεστή του  $x^k/k!$  (ουσιαστικά πολλαπλασιάζουμε τον συντελεστή του  $x^k$  με  $k!$ )
  - Λαμβάνουμε υπόψη διατάξεις στον σχηματισμό των απαριθμητών.
- Διατάξεις  $k$  αντικειμένων από  $n$  χωρίς επανάληψη.
  - $P(n, k) = C(n, k) \times k!$
  - Το  $P(n, k)$  προκύπτει ως συντελεστής του  $x^k/k!$  στο  $(1+x)^n$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!}$$

# Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

- Εκθετική Γεννήτρια Συν.  $E(x)$  ακολουθίας  $\mathbf{a}$ :  $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ 
  - Συντελεστής του  $x^n/n!$  αντιστοιχεί σε  $n$ -οστό όρο ακολουθίας  $\mathbf{a}$ .
- «Εκθετική» γιατί στην ακολουθία  $1, 1, 1, \dots$  αντιστοιχεί η Εκθετική ΓΣ (ΕΓΣ)  $e^x$  λόγω της ταυτότητας:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Εκθετικός απαριθμητής για μεταθέσεις  $n$  διαφορ. αντικ.:  $x^n = n! \frac{x^n}{n!}$
- Εκθετικός απαριθμητής για μεταθέσεις  $n$  ίδιων αντικειμένων:  $x^n/n!$
- ΕΓΣ για μεταθέσεις  $n$  αντικειμένων σε  $k$  ομάδες με ίδια αντικείμενα με πληθάρημο ομάδων  $n_1, n_2, \dots, n_k$ :

$$\frac{x^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{x^{n_2}}{n_2!} \cdot \dots \cdot \frac{x^{n_k}}{n_k!} = \frac{x^n}{n_1! \dots n_k!} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

# Παραδείγματα

---

- ΕΓΣ για **διανομή  $k$  διακεκριμένων αντικειμένων σε  $n$  διακεκριμένες υποδοχές χωρίς περιορισμούς και χωρίς να έχει σημασία η σειρά στις υποδοχές.**
  - Ισοδύναμα, ΕΓΣ για **διατάξεις  $k$  από  $n$  με απεριόριστες επανάληψεις.**
  - Εκθετικός απαριθμητής για κάθε υποδοχή:  $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$
  - Εκθετική ΓΣ:  $e^{nx}$  και ο συντελεστής  $x^k/k!$  είναι  $n^k$

# Παραδείγματα

- Το ίδιο με περιορισμό καμία υποδοχή να μην μείνει κενή ( $k \geq n$ ):
  - Εκθετικός απαριθμητής για κάθε υποδοχή:  $e^x - 1$
  - Εκθετική ΓΣ:  $(e^x - 1)^n$
  - Συντελεστής του  $x^k/k!$  είναι ίσος με  $\sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} (n - \ell)^k$
- Εφαρμογές:
  - Πρόγραμμα μελέτης 4 μαθημάτων για 7 ημέρες ώστε κάθε μάθημα να μελετηθεί τουλάχιστον 1 ημέρα.
    - «Διανομή» 7 διακ. ημερών σε 4 διακ. μαθήματα ώστε κανένα μάθημα να μην μείνει «κενό».
    - #«διανομών»:  $4^7 - 4 \times 3^7 + 6 \times 2^7 - 4 = 8400$
  - Ανάθεση 20 μεταπτ. φοιτητών σε 5 εργαστήρια ώστε κάθε εργαστήριο να δεχθεί τουλάχιστον 1 φοιτητή.
    - #«αναθέσεων»:  $5^{20} - 5 \times 4^{20} + 10 \times 3^{20} - 10 \times 2^{20} + 5$

# Παραδείγματα

---

□ #πενταδικών συμβ/ρών μήκους  $n$  με άρτιο πλήθος από 1:

■ Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 0, 2, 3, 4:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$$

■ Εκθετικός απαριθμητής για ψηφίο 1:

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

■ Εκθετική ΓΣ:  $e^4(e^x + e^{-x})/2 = (e^{5x} + e^{3x})/2$

■ Συντελεστής του  $x^n/n!$  είναι  $(5^n + 3^n)/2$

# Παραδείγματα

---

□ #πενταδικών συμβ/ρών μήκους  $n$  με άρτιο πλήθος 1 και περιττό πλήθος 0 όπου τα 2, 3, 4 εμφανίζονται τουλάχιστον 1 φορά.

■ Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 2, 3, 4:  $e^x - 1$

■ Εκθετικός απαριθμητής για ψηφίο 1:  $(e^x + e^{-x})/2$

■ Εκθετικός απαριθμητής για ψηφίο 0:

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

■ Εκθετική ΓΣ:  $(e^x - 1)^3 [(e^x + e^{-x})/2] [(e^x - e^{-x})/2]$

■ Συντελεστής του  $x^n/n!$  είναι

$$(5^n - 3 \times 4^n + 3^{n+1} - 2^n + (-2)^n - 3 \times (-1)^n - 1)/4$$

# Παραδείγματα

---

- ΕΓΣ για **διανομή  $k$  διακεκριμένων αντικειμένων σε  $n$  διακεκριμένες υποδοχές χωρίς περιορισμούς και όταν έχει σημασία η σειρά στις υποδοχές.**
  - Επειδή έχει σημασία η σειρά σε κάθε υποδοχή, κατά το σχηματισμό του απαριθμητή, **πολλαπλασιάζουμε το  $x^k/k!$  με  $k!$**
  - Ο **εκθετικός** απαριθμητής για κάθε υποδοχή είναι:

$$1 + 1! \frac{x}{1!} + 2! \frac{x^2}{2!} + 3! \frac{x^3}{3!} + 4! \frac{x^4}{4!} + 5! \frac{x^5}{5!} + \dots = \frac{1}{1-x}$$

- Η (Ε)ΓΣ είναι  $1/(1-x)^n$
- Το ζητούμενο δίνεται από τον **συντελεστή του  $x^k/k!$** , που είναι:

$$\binom{n+k-1}{k} \times k! = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$