

Συνδυαστική Απαρίθμηση

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Συνδυαστική Απαρίθμηση

- Υπολογισμός (με συνδυαστικά επιχειρήματα) του **πλήθους των διαφορετικών αποτελεσμάτων** ενός «πειράματος».
 - «Πείραμα»: διαδικασία με συγκεκριμένο (πεπερασμένο) σύνολο παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων.
 - Π.χ. ρίψη ζαριών, μοίρασμα τράπουλας, ανάθεση γραφείων, επιλογή password, βάδες Lotto, ...
 - Πληθάριθμος δυναμοσυνόλου: αν $|A| = n$, τότε $|P(A)| = 2^n$
- Βασικές αρχές και έννοιες:
 - Κανόνες **γινομένου** και **αθροίσματος**, αρχή **εγκλεισμού** – **αποκλεισμού**.
 - **Διατάξεις** και **μεταθέσεις** (με ή χωρίς) επανάληψη.
 - **Συνδυασμοί** (με ή χωρίς) επανάληψη.

Κανόνας Γινομένου

- Πείραμα **A** με **n** αποτελέσματα. Πείραμα **B** με **m** αποτελέσματα.
- Αν **αποτελέσματα** A και B είναι **ανεξάρτητα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων **A και B** έχει **$n \times m$** αποτελέσματα.
 - **Ανεξάρτητα**: το αποτέλεσμα του A **δεν επηρεάζει** (ως προς τον αριθμό των αποτελεσμάτων) το αποτέλεσμα του B, και αντίστροφα.
 - Π.χ. $|A \times B| = |A| \times |B|$
 - Επιλογή ενός **ψηφίου 0-9** και **ενός κεφαλαίου** Ελληνικού γράμματος:
 - $10 \times 24 = 240$ διαφορετικά αποτελέσματα.
 - #συμβ/ρών (με κεφαλαία Ελληνικά) μήκους 10: 24^{10}
 - #παλινδρομικών συμβ/ρών μήκους 10: 24^5
 - #συναρτήσεων από A στο B ($|A| = n, |B| = m$): m^n
 - #συναρτήσεων **1-1** από A στο B ($m \geq n$): $m(m-1) \cdots (m-n+1)$

Κανόνας Αθροίσματος

- Πείραμα A με n αποτελέσματα. Πείραμα B με m αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα A και B είναι **αμοιβαία αποκλειόμενα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων A ή B έχει $n+m$ αποτελέσματα.
 - **Αμοιβαία αποκλειόμενα**: η παρατήρηση αποτελέσματος του A αποκλείει την παρατήρηση αποτελέσματος του B , και αντίστροφα.
 - $|A \cup B| = |A| + |B|$, αν $|A \cap B| = \emptyset$
 - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά, και 10 Γερμανικά βιβλία.
 - Τρόποι να **διαλέξουμε 2 βιβλία σε διαφορετική γλώσσα**:
 - Ελλ. – Αγγλ.: $5 \times 7 = 35$
 - Ελλ. – Γερμ.: $5 \times 10 = 50$
 - Αγγλ. – Γερμ.: $7 \times 10 = 70$
 - Αμοιβαία αποκλειόμενα. Σύνολο: **155** διαφορετικές επιλογές.
 - Τρόποι να **διαλέξουμε 2 βιβλία**: $\frac{22 \times 21}{2} = 231$

Παραδείγματα

- **#passwords** με 6 – 8 χαρακτήρες αποτελούμενα από κεφαλαία (Αγγλικά) γράμματα και (τουλάχιστον ένα) δεκαδικό ψηφίο.
 - **#passwords** μήκους $k = 36^k - 26^k$
 - **#passwords** = $(36^6 + 36^7 + 36^8) - (26^6 + 26^7 + 26^8)$
- **#passwords** μήκους 2 από A, B, C, D και 0, 1, 2 με τουλάχιστον ένα ψηφίο.
 - **Σωστό** το $7^2 - 4^2 = 33$. **Λάθος** το (γιατί;) $2 \times 3 \times 7 = 42!$
- **#δυναμικών συμβ/ρών** μήκους 8 που **είτε** αρχίζουν από 1 **είτε** τελειώνουν σε 00:
 - **Όχι αμοιβαία αποκλειόμενα:** $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$.

Διατάξεις – Μεταθέσεις

- **Διατάξεις** $P(n, k)$: k από n διακεκριμένα αντικείμενα σε k διακεκριμένες θέσεις (1 αντικείμενο σε κάθε θέση).
 - $P(n, k) = \#$ τρόπων να πληρωθούν k διακεκριμένες θέσεις από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).
 - $$P(n, k) = n(n - 1) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
 - $\#$ τρόπων να πληρώσουμε 4 (διαφορετικές) θέσεις εργασίας αν έχουμε 30 υποψήφιους: $P(30, 4) = 30!/26!$
 - $\#$ συμβ/ρών μήκους 10 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες: $P(24, 10) = 24!/14!$
- **Μεταθέσεις** n αντικειμένων: $P(n, n) = n!$
 - $\#$ αναθέσεων 10 (διαφορετικών) γραφείων σε 10 καθηγητές: $P(10, 10) = 10!$
 - $\#$ συμβ/ρών μήκους 24 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες: $P(24, 24) = 24!$

Παραδείγματα

- #συμβ/ρών από 4 διαφορετικούς χαρακτήρες ακολουθούμενους από 3 διαφορετικά ψηφία:
 - $P(24, 4) \times P(10, 3)$
- #τετραψήφιων δεκαδικών αριθμών που δεν αρχίζουν από 0 και δεν έχουν επαναλαμβανόμενα ψηφία:
 - $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$.
- #μεταθέσεων (κεφαλαίων Ελληνικών) όπου Α εμφανίζεται πριν από τα Β και Γ:
 - $P(24, 21) \times 2!$
- #μεταθέσεων όπου Α εμφανίζεται πριν το Β, και μετά από τα Γ και Δ:
 - $P(24, 20) \times 2!$

Μεταθέσεις με Ομάδες

- #συμβ/ρών (μήκους 8) με γράμματα λέξης ΕΦΗΒΙΚΟΣ: $8!$
- #συμβ/ρών (μήκους 8) με γράμματα λέξης ΠΑΡΑΠΟΝΑ:
 - Μεταθέσεις με ομάδες ίδιων αντικειμένων: $8!/(2!3!1!1!1!)$
- Μεταθέσεις n αντικειμένων σε k ομάδες ίδιων αντικειμένων με πληθάρημο n_1, n_2, \dots, n_k αντίστοιχα:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 Α, 8 Β, 5 Γ, και 4 Δ: $24!/(7!8!5!4!)$
 - Αν πρώτο και τελευταίο Α: $22!/(5!8!5!4!)$
 - Αν δεν πρέπει να εμφανίζεται ΔΔΔΔ: $24!/(7!8!5!4!) - 21!/(7!8!5!1!)$
- Αριθμός $(n!)!$ διαιρείται ακριβώς από το $(n!)^{(n-1)!}$
 - Πηλίκο = #μεταθέσεων $n!$ αντικειμένων σε $(n-1)!$ ομάδες με n ίδια αντικείμενα καθεμία.

Διατάξεις με Επανάληψη

- #πενταψήφιων δεκαδικών αριθμών: 10^5
- Διατάξεις με επανάληψη: n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε απεριόριστα «αντίγραφα») σε k διακεκριμένες θέσεις: n^k
 - Διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα), όταν η σειρά στις υποδοχές δεν έχει σημασία.
- #πενταψήφιων δεκαδικών αριθμών με τουλ. ένα 8: $10^5 - 9^5$
- Πληθικός αριθμός δυναμοσυνόλου A : $2^{|A|}$
 - $|A|$ στοιχεία σε 2 υποδοχές (ανήκει – δεν ανήκει στο υποσύνολο).
- #δυναμικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος από 1: 2^{n-1}
 - \forall συμβ/ρά μήκους $n-1$, \exists μοναδική συμβ/ρά με άρτιο πλήθος 1.
 - Ιδέα του parity bit.

Διατάξεις με Επανάληψη

- #πενταδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος από 1:
 - #πενταδικών συμβ/ρών χωρίς 0 και 1 (άρτιο πλήθος 1): 3^n
 - Από τις υπόλοιπες $5^n - 3^n$, οι μισές περιέχουν άρτιο πλήθος 1.
 - Καθεμία περιέχει μια υπακολουθία με 0 και 1.
 - Από προηγούμενο, οι μισές υπακολουθίες έχουν άρτιο πλήθος 1.
 - Τελικά: $3^n + (5^n - 3^n)/2 = (5^n + 3^n)/2$
- #εβδομαδιαίων προγραμμάτων μελέτης για μαθήματα M, Φ, Χ, Ο ώστε κάθε μάθημα τουλάχιστον 1 ημέρα.
 - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $4^7 - |\overline{M} \cup \overline{\Phi} \cup \overline{X} \cup \overline{O}|$
 - #προγραμμάτων χωρίς 1 μάθημα: 3^7 (4 περιπτώσεις).
 - #προγραμμάτων χωρίς 2 μαθήματα: 2^7 (6 περιπτώσεις).
 - #προγραμμάτων χωρίς 3 μαθήματα: $1^7 = 1$ (4 περιπτώσεις)
 - #προγραμμάτων χωρίς 4 μαθήματα: 0
 - Τελικά: $4^7 - 4 \times 3^7 + 6 \times 2^7 - 4 = 8400$

Διατάξεις με Επανάληψη

- Διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό χωρητικότητας) με σειρά στις υποδοχές να έχει σημασία.
 - Ιστιοφόρο έχει n κατάρτια στα οποία μπορεί να αναρτηθούν k διαφορετικές σημαίες. Πόσα διαφορετικά σήματα;

$$n(n+1)\cdots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

- Κυκλικές μεταθέσεις n ατόμων: $(n-1)!$
 - #τρόπων που n άνθρωποι κάθονται σε κυκλικό τραπέζι (διακρίνουμε μεταξύ δεξιά και αριστερά).

Συνδυασμοί

- **Συνδυασμοί** $C(n, k)$: #επιλογών k από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).

$$C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = C(n, n-k)$$

- Διαφορετικές **6άδες Lotto** (από 1-49): $C(49, 6)$
- #υποσυνόλων με k στοιχεία από σύνολο n στοιχείων: $C(n, k)$
- #τρόπων στελέχωσης **5μελούς** κοινοβουλευτικής επιτροπής, όπου μέλη **ισότιμα**: $C(300, 5)$
- #δυναμικών **συμβ/ρών μήκους 32** με (ακριβώς) **επτά 1**: $C(32, 7)$
- #επιλογών 3 αριθμών 1-300 ώστε άθροισμα να διαιρείται από 3.
 - Αριθμοί 1-300 σε 3 ομάδες 100 αριθμών με βάση mod 3.
 - Είτε 3 από ίδια ομάδα είτε έναν από κάθε ομάδα.
 - Τελικά $3C(100, 3) + 100^3 = 1.485.100$

Συνδυασμοί με Επανάληψη

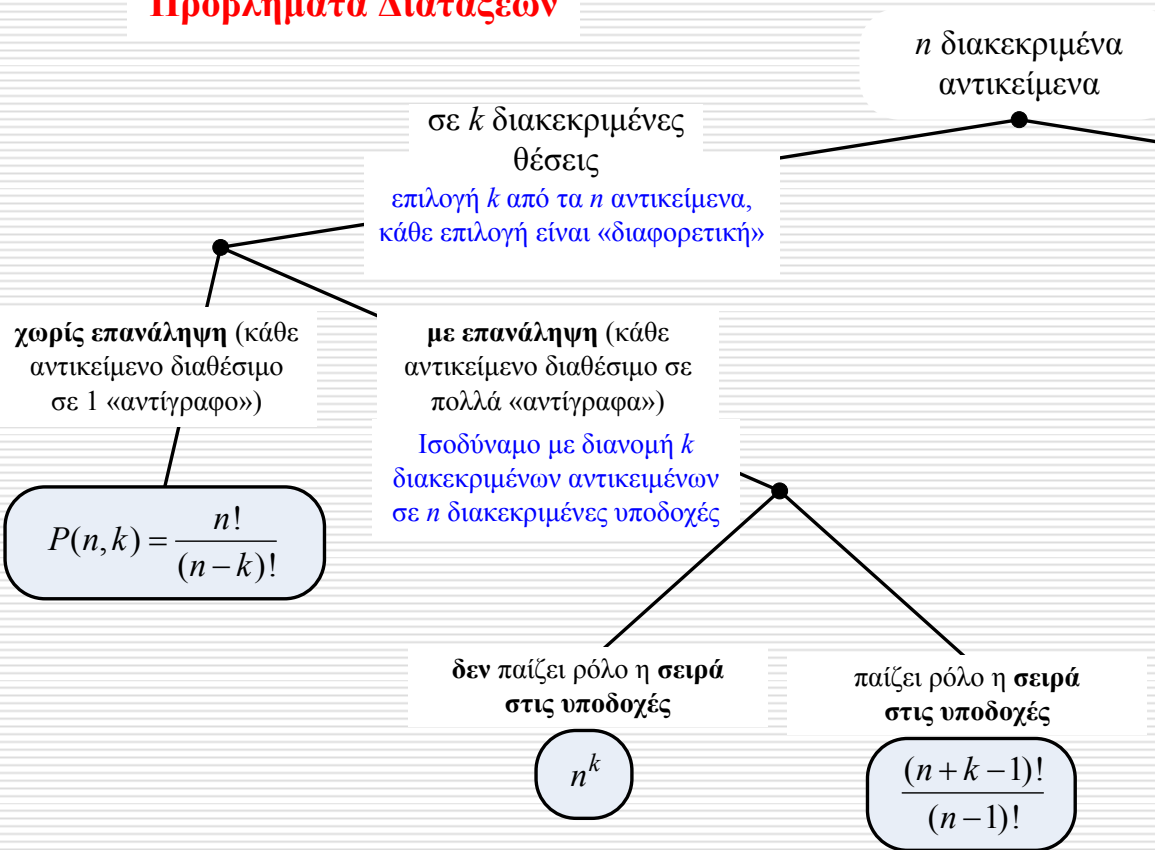
- Διαφορετικά **αποτελέσματα** από ρίψη 2 (ίδιων) ζαριών: **21**
- Συνδυασμοί με **επανάληψη**: k από n **διακεκριμένα** αντικείμενα (διαθέσιμα σε **απεριόριστα** «αντίγραφα»)
 - Διανομή k **ίδιων** αντικειμένων σε n **διακεκριμένες** υποδοχές (χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα).

$$C(n + k - 1, k) = \frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!} = \binom{n + k - 1}{k}$$

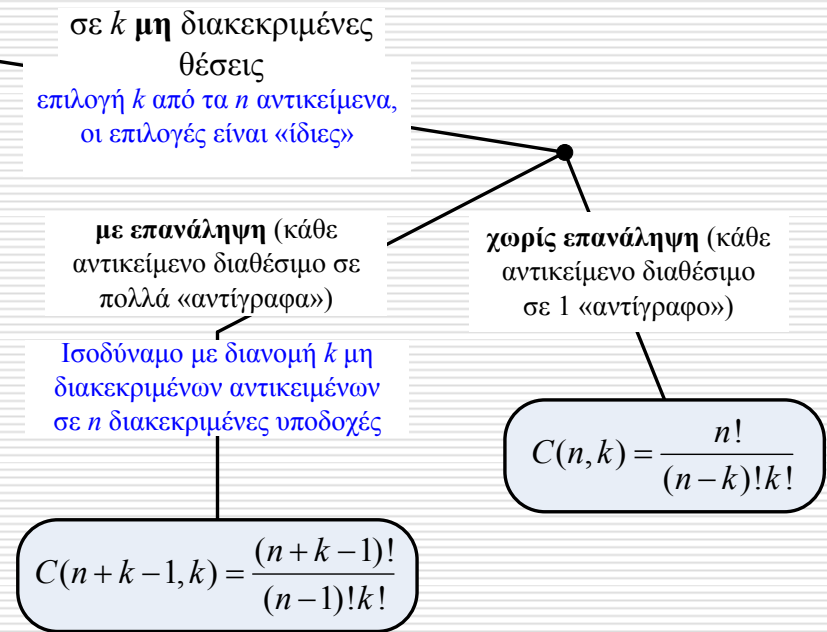
- Διανομές αντιστοιχούν σε **μεταθέσεις** $k - 1$ και $n - 1$ 0 .
#1 ανάμεσα σε 0 καθορίζει #αντικειμένων σε κάθε υποδοχή.
- #διανομών k ίδιων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές ώστε **καμία υποδοχή κενή** ($k \geq n$).
 - $C(n + (k - n) - 1, k - n) = C(k - 1, k - n) = C(k - 1, n - 1)$

Ανακεφαλαίωση

Προβλήματα Διατάξεων



Προβλήματα Συνδυασμών



Μεταθέσεις ($n = k$): $P(n, n) = n!$

Μεταθέσεις n αντικειμένων όταν έχουμε k ομάδες ίδιων αντικ. με πληθάρια n_1, \dots, n_k :

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Παραδείγματα

- #ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$
 - Αν $x_i \geq 0$: $C(20 + 4 - 1, 20) = C(23, 20) = C(23, 3)$
 - Αν $x_i \geq 1$: $C(16 + 4 - 1, 16) = C(19, 16) = C(19, 3)$
 - Αν $x_1 \geq 2, x_2 \geq 4, x_3 \geq 1, x_4 \geq 5$: $C(8 + 4 - 1, 8) = C(11, 3)$

- 5 διαφορετικά γράμματα (π.χ. Α, Β, Γ, Δ, Ε) και 20 κενά $_$.
#συμβ/ρών που αρχίζουν και τελειώνουν με γράμμα και έχουν ανάμεσα σε διαδοχικά γράμματα τουλάχιστον 3 κενά.
 - Μεταθέσεις 5 γραμμάτων: $5!$
 - 12 κενά στις 4 διακεκριμένες «υποδοχές» ανάμεσα σε γράμματα.
 - Υπόλοιπα 8 κενά στις 4 «υποδοχές» με $C(4 + 8 - 1, 8)$ τρόπους.
 - Τελικά: $C(11, 8) 5!$ συμβ/ρές.

Παραδείγματα

- n θρανία στη σειρά για k φοιτητές που εξετάζονται ($n \geq 2k-1$).
#τοποθετήσεων ώστε τουλάχιστον **μία κενή θέση** ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών.
 - Μεταθέσεις k φοιτητών: $k!$ (καταλαμβάνουν k θρανία).
 - Τοποθετούμε $k-1$ θρανία ανάμεσά τους.
 - Υπόλοιπα $n-2k+1$ (ίδια) θρανία στις $k+1$ διακεκριμένες «υποδοχές» στην αρχή, στο τέλος, και ανάμεσα σε φοιτητές.
 - $C((k+1) + (n-2k+1) - 1, n-2k+1) = C(n-k+1, n-2k+1)$
 $= C(n-k+1, k)$
 - Τελικά $C(n-k+1, k) k! = (n-k+1)!/(n-2k+1)!$
 - Διαφορετικά **μεταθέσεις** (με ομάδες) k διαφορετικών αντικειμένων (φοιτητών) και $n-2k+1$ **ίδιων** αντικειμένων (ελεύθερων θρανίων).

Παραδείγματα

- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 A, 8 B, 5 Γ, και 4 Δ όπου **δεν** εμφανίζεται το ΓΑ.
 - #συμβ/ρών μήκους 19 από 7 A, 8 B, και 4 Δ: $19!/(7!8!4!)$
 - Δημιουργούνται 20 διακεκριμένες «υποδοχές» για τα 5 Γ.
 - Εξαιρούνται οι 7 πριν από κάθε A.
 - Διανομή 5 Γ σε 13 διακεκριμένες «υποδοχές»: $C(13, 5)$.
 - Τελικά: $[19!/(7!8!4!)] \times [13!/(5!8!)]$.
- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 A, 8 B, 5 Γ, και 4 Δ όπου το **πρώτο B** εμφανίζεται **πριν** το πρώτο A.
 - #επιλογών θέσεων για 4 Δ (από 24): $C(24, 4)$.
 - #επιλογών θέσεων για 5 Γ (από 20): $C(20, 5)$.
 - Ένα B σε **πρώτη διαθέσιμη** θέση.
 - #επιλογών θέσεων για υπόλοιπα 7 B (από 14): $C(14, 7)$.
 - Συνολικά: $[24!/(4!5!15!)] \times [14!/(7!7!)]$.

Παραδείγματα

- Έστω το «τετράγωνο» που ορίζεται από τα σημεία $(0, 0)$, $(0, 8)$, $(10, 0)$, και $(10, 8)$.
- Πόσα διαφορετικά «μονοπάτια» από το $(0, 0)$ στο $(10, 8)$, αν σε κάθε βήμα μετακινούμαστε είτε κατά μια μονάδα προς τα πάνω είτε κατά μια μονάδα προς τα δεξιά.
 - Πρέπει να κάνουμε 8 βήματα Πάνω και 10 βήματα Δεξιά.
 - #μονοπατιών = #μεταθέσεων 8 Π και 10 Δ = $18!/(10! 8!)$
- Ακολουθίες a_1, \dots, a_n και β_1, \dots, β_m . #τρόπων καταγραφής στοιχείων των 2 ακολουθιών ώστε να διατηρείται η σειρά μεταξύ των στοιχείων της ίδιας ακολουθίας;
 - Μεταθέσεις n A και m B δείχνουν θέσεις στοιχείων κάθε ακολουθίας.
 - Δεδομένη η σειρά των στοιχείων κάθε ακολουθίας.
 - Τελικά: $(n+m)!/(n! m!)$.

Παραδείγματα

- #διανομών 22 διαφορ. βιβλίων πάχους 5 εκ. σε 3 διακεκριμένα ράφια μήκους 1 μ. το καθένα ώστε κανένα ράφι κενό.
 - k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές ώστε καμία υποδοχή κενή ($k \geq n$, πάχος βιβλίων δεν συνιστά περιορισμό).
 - Αν αντικείμενα ίδια, #διανομών: $C(k - 1, n - 1)$.
 - Αντικείμενα διαφορετικά: $C(k - 1, n - 1) \times k!$

Παραδείγματα

- $2n+1$ κοινοβουλευτικές **έδρες** να μοιραστούν σε **3 κόμματα** ώστε αν **οποιαδήποτε 2** συμφωνούν να έχουν **πλειοψηφία**.
 - #διανομών $2n+1$ (ίδιες) μπάλες σε 3 διακεκριμένες υποδοχές ώστε **κάθε υποδοχή $\leq n$ μπάλες**.
 - #διανομών χωρίς περιορισμούς: $\binom{2n+1+3-1}{2n+1} = \binom{2n+3}{2n+1} = \binom{2n+3}{2}$
 - #διανομών όπου **κάποια υποδοχή έχει $\geq n+1$ μπάλες**:
 - Επιλέγουμε (με 3 τρόπους) υποδοχή με «πλειοψηφία».
 - Τοποθετούμε σε αυτή $n+1$ μπάλες.
 - #διανομών υπόλοιπων n μπαλών στις 3 υποδοχές:
$$\binom{n+3-1}{n} = \binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2}$$
 - Τελικά #διανομών: $\binom{2n+3}{2} - 3\binom{n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Παραδείγματα

- Πόσα υποσύνολα 4 στοιχείων του $A = \{1, \dots, 15\}$ **δεν** περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς;
 - Υποσύνολο ως 4άδα (a_1, a_2, a_3, a_4) όπου $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq 15$
 - 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τέτοιων 4άδων (a_1, a_2, a_3, a_4) και λύσεων της εξίσωσης $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 14$ στους φυσικούς με $\beta_2, \beta_3, \beta_4 \geq 1$:
$$\begin{aligned} 1 + \beta_1 &= a_1 & a_1 + \beta_2 &= a_2 \\ a_2 + \beta_3 &= a_3 & a_3 + \beta_4 &= a_4 \\ a_4 + \beta_5 &= 15 \end{aligned}$$
 - Για να μην είναι a_1, a_2, a_3, a_4 διαδοχικοί, πρέπει $\beta_2, \beta_3, \beta_4 \geq 2$.
 - Διανομή 14 ίδιων μπαλών σε 5 διαφορετικές υποδοχές, ώστε υποδοχές 2, 3, και 4 να έχουν τουλάχιστον 2 μπάλες.
 - Αποτέλεσμα: $C(12, 8) = C(12, 4) = 495$.
- Να γενικεύσετε για #υποσυνόλων k στοιχείων του $\{1, \dots, n\}$ που **δεν** περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς.

Υποσύνολα Πολυσυνόλου

- #υποσύνολων πολυσυνόλου με k στοιχεία όπου κάθε στοιχείο p είναι διαθέσιμο σε n_p «αντίγραφα».
 - $(1+n_1)(1+n_2) \dots (1+n_k)$
 - Για #μη κενών υποσυνόλων: $(1+n_1)(1+n_2) \dots (1+n_k) - 1$
- #δαιρετών του 180;
 - Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $180 = 2^2 3^2 5$.
 - #δαιρετών 180 = #υποσυνόλων $\{2:2, 3:2, 5:1\}$
 - #δαιρετών του 180 = $3 \times 3 \times 2 = 18$.
- #δαιρετών του 1400;
 - Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $1400 = 2^3 5^2 7$.
 - #δαιρετών 1400 = #υποσυνόλων $\{2:3, 5:2, 7:1\}$
 - #δαιρετών του 1400 = $4 \times 3 \times 2 = 24$.