Συνδυασμοί

- **Συνδυασμοί** C(n, k): #επιλογών k από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = C(n,n-k)$$

  - Διαφορετικές 6άδες Lotto (από 1-49): $C(49,6)$
  - #υποσυνόλων με k στοιχεία από σύνολο n στοιχείων: $C(n,k)$
  - #τρόπων στελέχωσης 5μελούς κοινοβουλευτικής επιτροπής, όπου μέλη ισότιμα: $C(300,5)$
  - #δυαδικών συμβ/ρών μήκους 32 με (ακριβώς) επτά 1: $C(32,7)$
- #επιλογών 3 αριθμών 1-300 ώστε άθροισμα να διαιρείται από 3.
  - Αριθμοί 1-300 σε 3 ομάδες 100 αριθμών με βάση mod 3.
  - Είτε 3 από ίδια ομάδα είτε έναν από κάθε ομάδα.
  - Τελικά 3C(100, 3) + 100^3 = 1.485.100

Συνδυασμοί με Επανάληψη

- Διαφορετικά αποτελέσματα από ρίψη 2 (ίδιων) ζαριών: 21
- Συνδυασμοί με **επανάληψη**: k από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε απεριόριστα «αντίγραφα»).
  - Διανομή k ίδιων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα).

$$C(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

  - Διανομές αντιστοιχούν σε μεταθέσεις k 1 και n-1 0. #1 ανάμεσα σε 0 καθορίζει #αντικειμένων σε κάθε υποδοχή.
- #διανομών k ίδιων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές ώστε καμία υποδοχή κενή (k ≥ n).
  - C(n + (k – n) – 1, k – n) = C(k – 1, k – n) = C(k – 1, n – 1)

Παραδείγματα

- #ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$
  - Αν $x_i \geq 0$: C(20 + 4 - 1, 20) = C(23, 20) = C(23, 3)
  - Αν $x_i \geq 1$: C(16 + 4 - 1, 16) = C(19, 16) = C(19, 3)
  - Αν $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 4$, $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq 5$: C(8 + 4 - 1, 8) = C(11, 3)
- 5 διαφορετικά γράμματα (π.χ. Α, Β, Γ, Δ, Ε) και 20 κενά _ . #συμβ/ρών που αρχίζουν και τελειώνουν με γράμμα και έχουν ανάμεσα σε διαδοχικά γράμματα τουλάχιστον 3 κενά.
  - Μεταθέσεις 5 γραμμάτων: 5!
  - 12 κενά στις 4 διακεκριμένες «υποδοχές» ανάμεσα σε γράμματα.
  - Υπόλοιπα 8 κενά στις 4 «υποδοχές» με C(4 + 8 – 1, 8) τρόπους.
  - Τελικά: C(11, 8) 5! συμβ/ρές.

Παραδείγματα

- n θρανία στη σειρά για k φοιτητές που εξετάζονται ($n \geq 2k-1$). #τοποθετήσεων ώστε τουλάχιστον μια κενή θέση ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών.
  - Μεταθέσεις k φοιτητών: $k!$ (καταλαμβάνουν k θρανία).
  - Τοποθετούμε $k-1$ θρανία ανάμεσά τους.
  - Υπόλοιπα $n-2k+1$ (ίδια) θρανία στις $k+1$ διακεκριμένες «υποδοχές» στην αρχή, στο τέλος, και ανάμεσα σε φοιτητές.
    - $C((k+1) + (n-2k+1) - 1, n-2k+1) = C(n-k+1, n-2k+1)$
      $= C(n-k+1, k)$
  - Τελικά $C(n-k+1, k)\, k! = (n-k+1)!/(n-2k+1)!$
  - Διαφορετικά μεταθέσεις (με ομάδες) k διαφορετικών αντικειμένων (φοιτητών) και $n-2k+1$ ίδιων αντικειμένων (ελεύθερων θρανίων).

Παραδείγματα

- 2n+1 κοινοβουλευτικές έδρες να μοιραστούν σε 3 κόμματα ώστε αν οποιαδήποτε 2 συμφωνούν να έχουν πλειοψηφία.
  - #διανομών 2n+1 (ίδιες) μπάλες σε 3 διακεκριμένες υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή ≤ n μπάλες.
  - #διανομών χωρίς περιορισμούς: $\binom{2n+1+3-1}{2n+1} = \binom{2n+3}{2n+1} = \binom{2n+3}{2}$
  - #διανομών όπου κάποια υποδοχή έχει ≥ n+1 μπάλες:
    - Επιλέγουμε (με 3 τρόπους) υποδοχή με «πλειοψηφία».
    - Τοποθετούμε σε αυτή n+1 μπάλες.
    - #διανομών υπόλοιπων n μπαλών στις 3 υποδοχές:

$$\binom{n+3-1}{n} = \binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2}$$

  - Τελικά #διανομών: $\binom{2n+3}{2} - 3\binom{n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Παραδείγματα

- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 Α, 8 Β, 5 Γ, και 4 Δ όπου δεν εμφανίζεται το ΓΑ.
  - #συμβ/ρών μήκους 19 από 7 Α, 8 Β, και 4 Δ: 19!/(7!8!4!)
  - Δημιουργούνται 20 διακεκριμένες «υποδοχές» για τα 5 Γ.
  - Εξαιρούνται οι 7 πριν από κάθε Α.
  - Διανομή 5 Γ σε 13 διακεκριμένες «υποδοχές»: C(17, 5).
  - Τελικά: [19!/(7!8!4!)]×[17!/(5!12!)].
- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 Α, 8 Β, 5 Γ, και 4 Δ όπου το πρώτο Β εμφανίζεται **πριν** το πρώτο Α.
  - #επιλογών θέσεων για 4 Δ (από 24): C(24, 4).
  - #επιλογών θέσεων για 5 Γ (από 20): C(20, 5).
  - Ένα Β σε πρώτη διαθέσιμη θέση.
  - #επιλογών θέσεων για υπόλοιπα 7 Β (από 14): C(14, 7).
  - Συνολικά: [24!/(4!5!15!)]×[14!/(7!7!)].

Παραδείγματα

- #διανομών 22 διαφορ. βιβλίων πάχους 5 εκ. σε 3 διακεκριμένα ράφια μήκους 1 μ. το καθένα ώστε κανένα ράφι κενό.
  - k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές ώστε καμία υποδοχή κενή ($k \geq n$, πάχος βιβλίων δεν συνιστά περιορισμό).
  - Αν αντικείμενα ίδια, #διανομών: $C(k - 1, n - 1)$.
  - Αντικείμενα διαφορετικά: $C(k - 1, n - 1) \times k!$
- Ράφι με n διαφορετικά βιβλία στη σειρά. #τρόπων επιλογής k βιβλίων ($n \geq 2k - 1$, δεν ενδιαφέρει η σειρά επιλογής) ώστε να μην επιλέξουμε διαδοχικά βιβλία;
  - Έχουμε k «1» (επιλογή) και $k - 1$ «0» ανάμεσά τους (μη επιλογή).
  - Διανομή υπόλοιπων $n - 2k + 1$ «0» σε $k+1$ διακεκριμένες υποδοχές.
  - Τελικά: $C(n - k + 1, k)$.

Παραδείγματα

- Έστω το «τετράγωνο» που ορίζεται από τα σημεία (0, 0), (0, 8), (10, 0), και (10, 8).
- Πόσα διαφορετικά «μονοπάτια» από το (0, 0) στο (10, 8), αν σε κάθε βήμα μετακινούμαστε είτε κατά μια μονάδα προς τα πάνω είτε κατά μια μονάδα προς τα δεξιά.
  - Πρέπει να κάνουμε 8 βήματα **Π**άνω και 10 βήματα **Δ**εξιά.
  - #μονοπατιών = #μεταθέσεων 8 Π και 10 Δ = 18!/(10! 8!)
- Ακολουθίες $a_1, \ldots, a_n$ και $\beta_1, \ldots, \beta_m$. #τρόπων καταγραφής στοιχείων των 2 ακολουθιών ώστε να διατηρείται η σειρά μεταξύ των στοιχείων της ίδιας ακολουθίας;
  - Μεταθέσεις n A και m B δείχνουν θέσεις στοιχείων κάθε ακολουθίας.
  - Δεδομένη η σειρά των στοιχείων κάθε ακολουθίας.
  - Τελικά: $(n+m)!/(n!\ m!)$.

Παραδείγματα

- Πόσα υποσύνολα 4 στοιχείων του A = {1, ..., 15} **δεν** περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς;
  - Υποσύνολο ως 4άδα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ όπου $1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 \le 15$
  - 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τέτοιων 4άδων $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ και λύσεων της εξίσωσης $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5=14$ στους φυσικούς με $\beta_2, \beta_3, \beta_4 \ge 1$:

$$
\begin{aligned}
1+\beta_1 &= \alpha_1 & \alpha_1+\beta_2 &= \alpha_2 \\
\alpha_2+\beta_3 &= \alpha_3 & \alpha_3+\beta_4 &= \alpha_4 \\
\alpha_4+\beta_5 &= 15
\end{aligned}
$$

  - Για να μην είναι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ διαδοχικοί, πρέπει $\beta_2, \beta_3, \beta_4 \ge 2$.
  - Διανομή 14 ίδιων μπαλών σε 5 διαφορετικές υποδοχές, ώστε υποδοχές 2, 3, και 4 να έχουν τουλάχιστον 2 μπάλες.
  - Αποτέλεσμα: C(12, 8) = C(12, 4) = 495.
- Να γενικεύσετε για #υποσυνόλων k στοιχείων του {1, ..., n} που δεν περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς.