

Αρχή του Περιστερώνα

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Συναρτήσεις

- **Συνάρτηση:** διμελής σχέση $R \subseteq A \times B$ όπου για κάθε $a \in A$, υπάρχει μοναδικό $\beta \in B$ τ.ω. $(a, \beta) \in R$.
 - A : πεδίο ορισμού. B : πεδίο τιμών. $R(a) = \beta$: β εικόνα a (ως προς R).
- f συνάρτηση **1-1**: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.
 - Δεν υπάρχουν δύο στοιχεία με ίδια εικόνα.
- f συνάρτηση **επί**: για κάθε $\beta \in B$, υπάρχει $a \in A$ με $f(a) = \beta$.
 - Κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A .
- f **αμφιμονοσήμαντη**: 1-1 και επί.
 - f αντιστοιχία μεταξύ στοιχείων A και B .
 - Αντίστροφη f^{-1} είναι συνάρτηση αν f αμφιμονοσήμαντη.

Αρχή Περιστερών

- Αν $|A| > |B|$, **δεν** υπάρχει 1-1 συνάρτηση από A στο B.
 - Για κάθε συνάρτηση f , υπάρχουν $a_1, a_2 \in A$ τ.ω. $f(a_1) = f(a_2)$.
 - Αν n περισσότερα σε m φωλιές και $n > m$, φωλιά με ≥ 2 περισσότερα.
- Για κάθε συνάρτηση f από A στο B, υπάρχουν $\geq k = \lceil |A|/|B| \rceil$ $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ με $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_k)$.
 - Αν n περισσότερα σε m φωλιές, φωλιά με $\geq \lceil n/m \rceil$ περισσότερα.
- Τετριμμένα παραδείγματα:
 - Σε κάθε σύνολο 13 ανθρώπων, υπάρχουν ≥ 2 γεννημένοι ίδιο μήνα.
 - Στον κόσμο ζουν ≥ 2 άνθρωποι γεννημένοι το ίδιο δευτερόλεπτο.
 - Στην Ελλάδα ζουν ≥ 2 άνθρωποι γεννημένοι το ίδιο πεντάλεπτο.
 - Σε κάθε πάρτυ, υπάρχουν δύο καλεσμένοι με τον ίδιο αριθμό φίλων στο πάρτυ (υποθ: σχέση φίλος συμμετρική, όχι ανακλαστική).

Παραδείγματα

- \forall σύνολο 1000 διαφ. φυσικών, υπάρχουν $x \neq y$: $573 \mid (x - y)$.
 - Ποσότητες που αντιστοιχούν σε «περιστέρια» και «φωλιές»;
 - «Περιστέρια»: 1000 φυσικοί.
 - «Φωλιές»: 573 διαφορετικές τιμές για $n \bmod 573$.

- Για κάθε σύνολο 10 (διαφορετικών) φυσικών < 100 , υπάρχουν δύο διαφορετικά υποσύνολα με ίδιο άθροισμα.
 - «Περιστέρια»: $2^{10} - 1 = 1023$ διαφορετικά μη κενά υποσύνολα.
 - «Φωλιές»: Πιθανές τιμές για αθροίσματα υποσυνόλων (≤ 946).

- Αν θεωρήσουμε 26 διαφορετικά υποσύνολα του $\{1, \dots, 9\}$ με 3 στοιχεία το πολύ, δύο από αυτά έχουν το ίδιο άθροισμα.
 - «Περιστέρια»: 26 διαφορετικά υποσύνολα.
 - «Φωλιές»: Πιθανές τιμές για αθροίσματα υποσυνόλων (≤ 25).

Παραδείγματα

- Αν 7 διαφορετικοί αριθμοί επιλεγούν από το $\{1, 2, \dots, 11\}$, 2 από αυτούς αθροίζονται στο 12.
 - «Περιστέρια»: 7 επιλεγμένοι αριθμοί.
 - «Φωλιές»: 6 «ζευγάρια» αριθμών που αθροίζονται στο 12.
 - $\{1, 11\}, \{2, 10\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{6\}$.
 - $\{6\}$ «δέχεται» έναν αριθμό το πολύ (μόνο το 6).
 - Επιλέγουμε και τους δύο αριθμούς κάποιου άλλου ζευγαριού.
- Αν $n+1$ διαφορετικοί αριθμοί επιλεγούν από το $\{1, \dots, 2n-1\}$, 2 από αυτούς αθροίζονται στο $2n$.
 - «Περιστέρια»: $n+1$ επιλεγμένοι αριθμοί.
 - «Φωλιές»: n «ζευγάρια» αριθμών που αθροίζονται στο $2n$.
 - $\{n\}$ «δέχεται» έναν αριθμό το πολύ (μόνο το n).

Παραδείγματα

- Αν επιλέξουμε $n+1$ φυσικούς από $\{1, 2, \dots, 2n\}$, υπάρχουν δύο που είναι **σχετικά πρώτοι**.
 - Αρκεί νδο υπάρχουν δύο αριθμοί a, β : $\beta = a+1$.
 - «Περιστέρια»: $n+1$ επιλεγμένοι αριθμοί.
 - «Φωλιές»: n ζεύγη «συνεχόμενων» αριθμών στο $\{1, 2, \dots, 2n\}$.
 - $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$.
- Αν επιλέξουμε $n+1$ φυσικούς υπάρχουν δύο που η **διαφορά τους διαιρείται από το n** .
 - «Περιστέρια»: $n+1$ επιλεγμένοι αριθμοί.
 - «Φωλιές»: n υπόλοιπα διαίρεσης με n ($\{0, 1, \dots, n-1\}$).
 - Δύο αριθμοί σε ίδια «φωλιά»: **διαφορά τους διαιρείται από n** .

Παραδείγματα

- Αν επιλέξουμε $n+1$ φυσικούς από $\{1, 2, \dots, 2n\}$, υπάρχουν δύο που ο ένας διαιρεί τον άλλο.
 - «Περιστέρια»: $n+1$ επιλεγμένοι αριθμοί.
 - «Φωλιές»: n περιττοί αριθμοί στο $\{1, 2, \dots, 2n\}$.
 - Αριθμός x στη «φωλιά» m αν m μεγαλύτερος περιττός διαιρέτης του x ($x = 2^k m$, για κάποιο $k \geq 0$).
 - Αριθμοί x και y στην ίδια «φωλιά»: $x = 2^k m$ και $y = 2^s m$, άρα είτε $x \mid y$ είτε $y \mid x$.

Παραδείγματα

- Σε κάθε ακολουθία n^2+1 διαφορετικών αριθμών, είτε αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε φθίνουσα υπακολ. μήκους $n+1$.
 - Υπακολουθία προκύπτει με διαγραφή κάποιων αριθμών.
- Αντιστοιχούμε αριθμό a_k στο (x_k, y_k) .
 - $x_k (y_k)$: μήκους μεγαλύτερης αύξουσας (φθίνουσας) υπακολουθίας που αρχίζει στη θέση k .
- Αν όλα $x_k \leq n$ και όλα $y_k \leq n$, #ζευγών $\leq n^2$.
 - Αρχή περιστέρων: υπάρχουν δύο αριθμοί a_k και a_s ($k < s$) που αντιστοιχούνται στο ίδιο ζεύγος (x, y) .
 - Άτοπο: αν $a_k < a_s$, τότε $x_k > x_s$, ενώ αν $a_k > a_s$, τότε $y_k > y_s$.
- Αποδεικνύεται ορίζοντας κατάλληλο poset και μελετώντας μήκη αλυσίδων και μεγέθη αντιαλυσίδων (βλ. Liu, 4.41, 4.42).

Αριθμοί Ramsey

- Σε κάθε σύνολο 6 ανθρώπων, είτε 3 φίλοι είτε 3 άγνωστοι.
 - Για κάθε χρωματισμό ακμών στο K_6 με μπλε και κόκκινο, υπάρχει μονοχρωματικό K_3 .
- Υπάρχει άνθρωπος a που έχει είτε 3 φίλους είτε 3 αγνώστους.
 - Χβτγ. υποθέτουμε ότι a έχει 3 φίλους: β, γ, δ .
 - Αν στους β, γ, δ δύο φίλοι (π.χ. β, γ): έχουμε 3 φίλους (a, β, γ).
 - Αν στους β, γ, δ όλοι άγνωστοι: έχουμε 3 αγνώστους (a, β, γ).
- $R(m, s) =$ ελάχιστο n τ.ω για κάθε χρωματισμό ακμών του K_n με μπλε και κόκκινο, υπάρχει είτε μπλε K_m είτε κόκκινο K_s .
 - $R(m, s) = R(s, m)$ και $R(m, s) \leq R(m - 1, s) + R(m, s - 1)$.
 - Αντίστοιχα για περισσότερα από 2 χρώματα.
 - \forall χρωματισμό ακμών ενός μεγάλου πλήρους γραφήματος, υπάρχει μονοχρωματικό πλήρες υπογράφημα επιθυμητού μεγέθους.