Μαθηματική Επαγωγή

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Τεχνικές Απόδειξης

- Εξαντλητική μέθοδος: πεπερασμένος αριθμός περιπτώσεων.
- Απόδειξη για $p \to q$:
  - Ευθέως: αιτιολογούμε ότι συμπέρασμα q έπεται από υπόθεση p.
  - Αντιθετοαναστροφή: αιτιολογούμε ότι η άρνηση της υπόθεσης ($\neg p$) έπεται από την άρνηση του συμπεράσματος ($\neg q$).
    - Ιδιότητα $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
    - Π.χ. αν n^2 άρτιος, τότε n άρτιος.
  - Απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε ότι $\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$ και αιτιολογούμε αντίφαση.
    - Π.χ. το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (Πυθαγόρας).
- Μαθηματική Επαγωγή.

Αποδείξεις Ύπαρξης

- Κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης.
  - Αλγόριθμος κατασκευής του ζητούμενου.
- Μη κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης.
  - Αρχή περιστερώνα.
    - Αν m μπάλες σε n κουτιά και m > n, τότε κάποιο κουτί έχει περισσότερες από 1 μπάλες.
  - Επιχειρήματα ισοτιμίας και καταμέτρησης.
    - Κάθε ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα με «πηγή», έχει «καταβόθρα».
    - Κάθε (μη κατευθυνόμενο) γράφημα έχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού.
  - Πιθανοτική μέθοδος.
    - Αν κάτι έχει θετική πιθανότητα να επιλεγεί από (κατάλληλο) δειγματοχώρο, τότε υπάρχει.

Μαθηματική Επαγωγή

- Αποδεικνύουμε ότι «$P(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$».
  - **Δομική επαγωγή**: όλα τα στοιχεία (αριθμήσιμα) άπειρου συνόλου που ορίζεται αναδρομικά έχουν ιδιότητα P.

Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής

- Έστω $P(n)$ μια πρόταση που εξαρτάται από φυσικό αριθμό n.
- Για νδο $P(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$, αρκεί νδο:
  - **Βάση**: το $P(n_0)$ αληθεύει.
  - **Βήμα**: για κάθε $n \geq n_0$, αν $P(n)$ αληθεύει, τότε $P(n+1)$ αληθεύει.

Αρχή Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής

- Για νδο $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \geq n_0$, αρκεί νδο:
  - **Βάση**: το $P(n_0)$ αληθεύει.
  - **Βήμα**: για κάθε $n \geq n_0$, αν $P(k)$ αληθεύει για κάθε $k \in \{n_0, \ldots, n\}$, τότε $P(n+1)$ αληθεύει.

Όροι Γεωμετρικής Προόδου

- Να δείξετε ότι για κάθε n ≥ 0, $1+2+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$.
  - Πρόταση P(n) ≡ «$1+2+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$».
  - Βάση: Αληθεύει για n = 0: $2^0 = 1 = 2 - 1$.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) n ≥ 0, αληθεύει P(n), δηλ. ότι $1+2+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο αληθεύει P(n+1), δηλ. ότι $1+2+\ldots+2^n+2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$.

$$\begin{aligned}\overbrace{1+2+2^2\ldots+2^n}^{=2^{n+1}-1}+2^{n+1} &= 2^{n+1}-1+2^{n+1}\\ &= 2^{n+2}-1\end{aligned}$$

- Νδο για κάθε r ≠ 1 και n ≥ 0,

$$1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

Αρμονικοί Αριθμοί

- Αρμονικός αριθμός τάξης k: $H_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$
- Να δείξετε ότι για κάθε n ≥ 0, $1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$
  - Συνεπώς $1 + \frac{1}{2}\log_2 k \leq H_k \leq 1 + \log_2 k$
  - Άνω φράγμα, πρόταση P(n) ≡ « $H_{2^n} \leq 1 + n$ »
  - Βάση: Αληθεύει για n = 0: $H_1 = 1 = 1+0$.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) n ≥ 0, αληθεύει P(n), δηλ. ότι $H_{2^n} \leq 1 + n$

Αρμονικοί Αριθμοί

- Επαγωγικό βήμα: Θδο αληθεύει P(n+1), δηλ. ότι $H_{2^{n+1}} \leq 1 + (n+1)$

$$H_{2^{n+1}} = \overbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}^{=H_{2^n} \leq 1+n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\leq 1 + n + \overbrace{\frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}^{2^n \text{ όροι} < \frac{1}{2^n}}$$

$$\leq 1 + n + 2^n \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 + (n+1)$$

Διαιρετότητα

- Να δείξετε ότι για κάθε n ≥ 1, το n^3+2n διαιρείται από το 3.
  - Βάση: Αληθεύει για n = 1: Το 3 διαιρείται από το 3.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) n ≥ 1, το $n^3 + 2n$ διαιρείται από το 3.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο το $(n+1)^3 + 2(n+1)$ διαιρείται από το 3.
  - Πράγματι,

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2(n+1) \\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\,,\end{aligned}$$

όπου και οι δύο όροι διαιρούνται από το 3 (ο 1ος λόγω της επαγωγικής υπόθεσης).

Πληθάριθμος Δυναμοσυνόλου

- Νδο για κάθε (πεπερασμένο) σύνολο A με n στοιχεία, το δυναμοσύνολο του A έχει 2^n στοιχεία.
  - Μαθηματική επαγωγή στο n (πληθικό αριθμό συνόλου A).
  - Βάση: Αληθεύει για n = 0: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ και $|P(\emptyset)| = 2^0$.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 0$, αληθεύει ότι για κάθε σύνολο A με $|A| = n$, $|P(A)| = 2^n$.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο $\forall$σύνολο A με $|A| = n+1$, $|P(A)| = 2^{n+1}$.
    - A (αυθαίρετα επιλεγμένο) σύνολο με n+1 στοιχεία. Θεωρούμε $x \in A$ και $A_x = A - \{x\}$ με $|A_x| = n$.
    - Κάθε υποσύνολο του A είτε περιέχει το x είτε όχι.
    - Σε κάθε υποσύνολο $S \subseteq A_x$ αντιστοιχούν δύο υποσύνολα του A: το S και το $S \cup \{x\}$.
    - Άρα $|P(A)| = 2 \cdot |P(A_x)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Λάθος Χρώμα!

- Να βρείτε το **λάθος** στον παρακάτω επαγωγικό συλλογισμό.
- Θδο για κάθε n ≥ 1, σε κάθε σύνολο n αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
  - Βάση: Ισχύει για n = 1.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) n ≥ 1, σε κάθε σύνολο n αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο σε κάθε σύνολο n+1 αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
    - Σύνολο με n+1 αυτοκίνητα: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$
    - Από επαγ. υπόθεση, τα n πρώτα αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα, και n τελευταία αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα:

$$\{\overbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}^{\text{ίδιο χρώμα}}, \alpha_{n+1}\} \qquad \{\alpha_1, \overbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}}^{\text{ίδιο χρώμα}}\}$$

    - Αφού σύνολο n πρώτων και σύνολο n τελευταίων αυτοκινήτων έχουν κοινά στοιχεία, όλα τα αυτοκ. στο A έχουν ίδιο χρώμα!

Λάθος Χρώμα!

- Επαγωγικό βήμα: Θδο σε κάθε σύνολο n+1 αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
  - Σύνολο με n+1 αυτοκίνητα: A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$
  - Από επαγ. υπόθεση, τα n πρώτα αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα, και n τελευταία αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα:

$$\{\overbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}^{\text{ίδιο χρώμα}}, \alpha_{n+1}\} \qquad \{\alpha_1, \overbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}}^{\text{ίδιο χρώμα}}\}$$

  - Αφού σύνολο n πρώτων και σύνολο n τελευταίων αυτοκινήτων έχουν κοινά στοιχεία, όλα τα αυτοκ. στο A έχουν ίδιο χρώμα!
- Για n = 1, τα δύο σύνολα **δεν** έχουν **κοινά** στοιχεία!
- Εδώ ισχύει ότι P(1) και ότι P(n) → P(n+1) για κάθε n ≥ 2.
  - Δεν ισχύει ότι P(1) → P(2): αυτό καθιστά συμπέρασμα αβάσιμο!

Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Κάποτε χρήσιμο να αποδείξουμε ισχυρότερη πρόταση P'(n).
  - Είναι δυνατό να **μην** ισχύει ότι $P(n) \rightarrow P(n+1)$, αλλά να ισχύει $P'(n) \rightarrow P'(n+1)$, για ισχυρότερη πρόταση P'(n).
- Νδο. για κάθε $n \geq 1$,

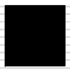
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} \leq 2$$

  - Επαγωγική υπόθεση $S_n \leq 2$ δεν συνεπάγεται ότι $S_{n+1} \leq 2$.
- Ευκολότερο νδ (επαγωγικά) ότι για κάθε $n \geq 1$,

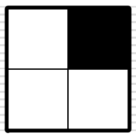
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

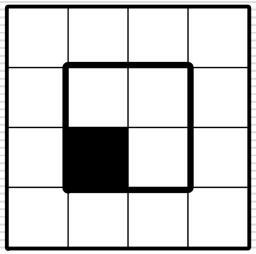
- Κάποτε χρήσιμο να αποδείξουμε ισχυρότερη πρόταση P′(n).
  - Είναι δυνατό να **μην** ισχύει ότι $P(n) \rightarrow P(n+1)$, αλλά να ισχύει $P'(n) \rightarrow P'(n+1)$, για ισχυρότερη πρόταση P′(n).
- **Σκακιέρα** τάξης **n** με μαύρο στο **κέντρο**: τετράγωνη σκακιέρα με $2^n \times 2^n$ τετράγωνα, όλα λευκά εκτός από ένα μαύρο στο κέντρο.
- Ν.δ.ο. για κάθε $n \geq 0$, λευκά τετράγωνα σκακιέρας τάξης n με μαύρο στο **κέντρο** καλύπτονται από πλακίδια σχήματος L (μη επικαλυπτόμενα).



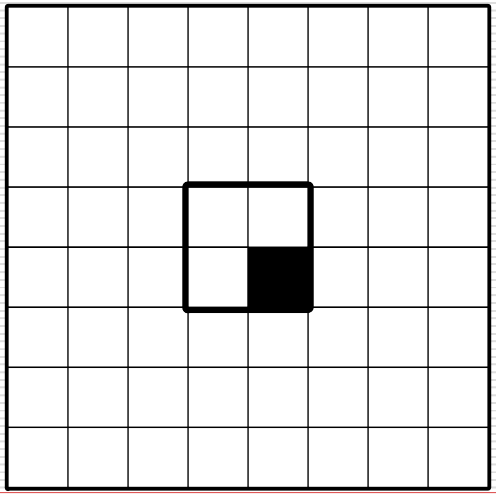
$n = 0$



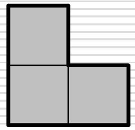
$n = 1$



$n = 2$



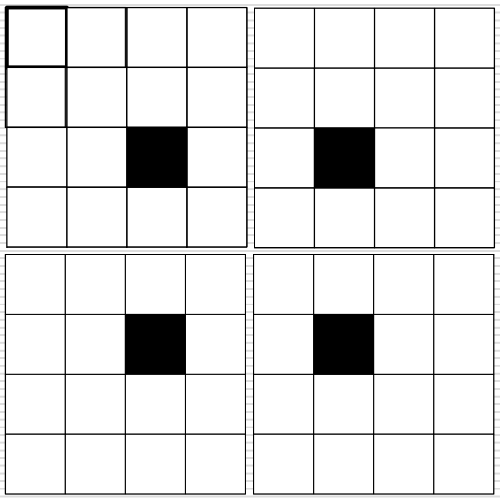
$n = 3$

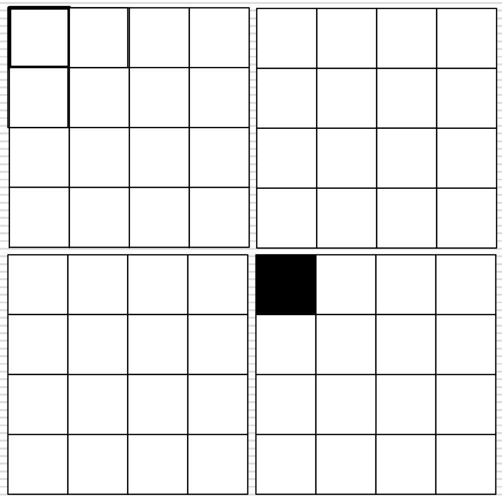


Πλακίδιο σχήματος L

Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

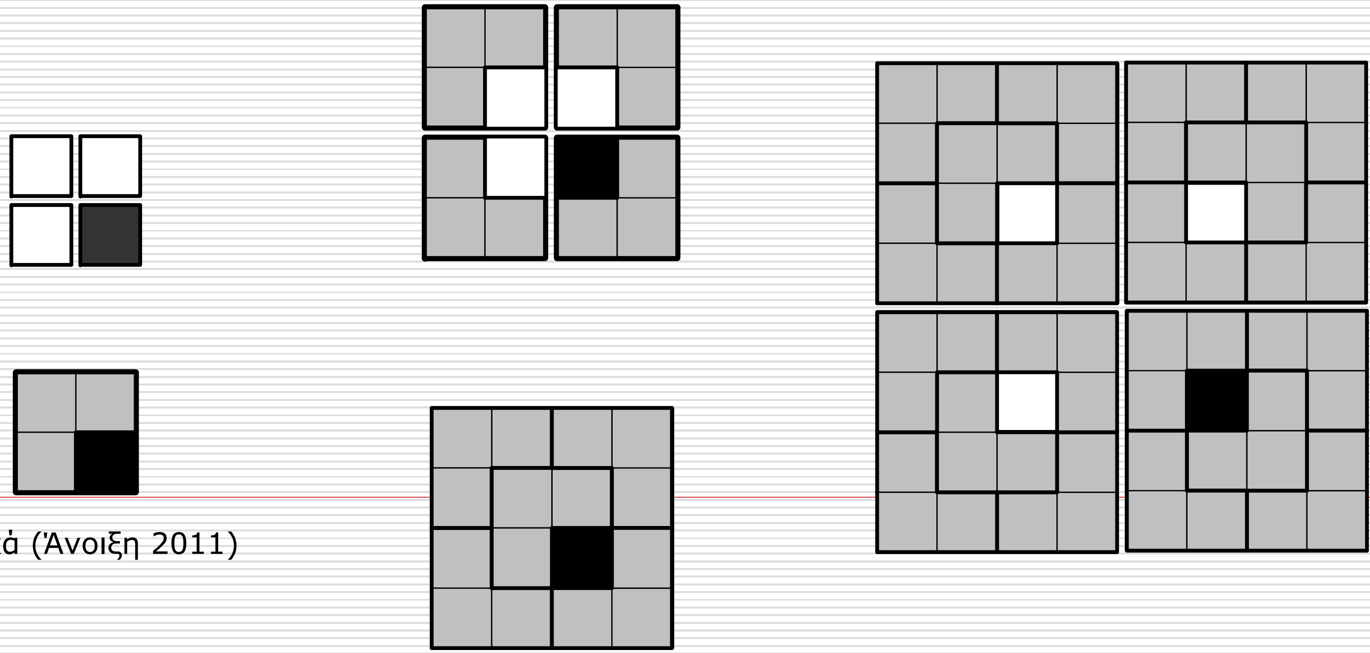
- Βάση: P(0) ισχύει (δεν υπάρχουν λευκά τετράγωνα).
- Επαγωγικό βήμα:
  - Σκακιέρα τάξης n+1 με μαύρο στο κέντρο:
    ένωση 4 σκακιέρων τάξης n με μαύρο στο κέντρο,
    3 μαύρα γίνονται λευκά, 1 μαύρο μετακινείται στο κέντρο.





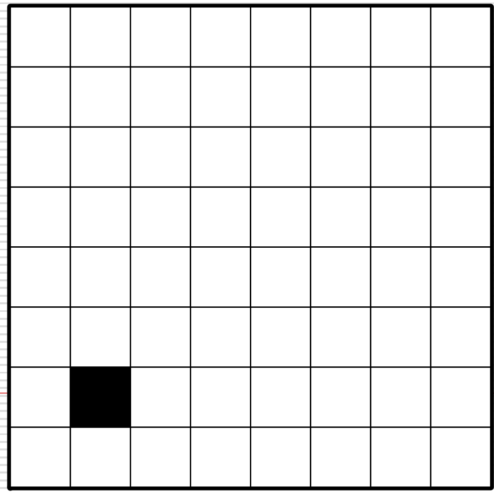
Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Βάση: P(0) ισχύει (δεν υπάρχουν λευκά τετράγωνα).
- Επαγωγικό βήμα:
  - $P(0) \rightarrow P(1)$, $P(1) \rightarrow P(2)$: 3 νέα λευκά καλύπτονται με 1 πλακίδιο.
- $P(2) \rightarrow P(3)$;
  - Λευκά όχι γειτονικά, μετακινήσεις επηρεάζουν διάταξη πλακιδίων!
  - Χρήση επαγωγικής υπόθεσης όχι προφανής!
- Δυσκολία λόγω περιορισμού ότι μαύρο στο κέντρο!



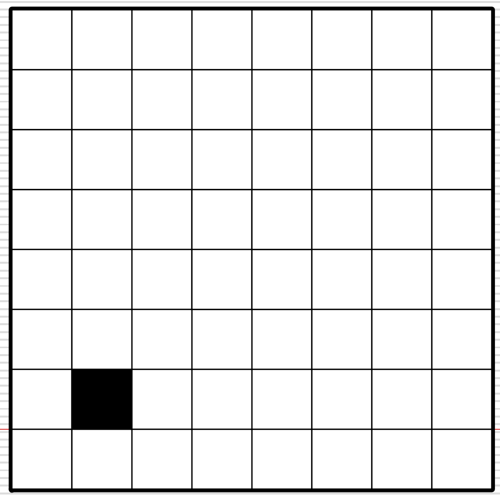
Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

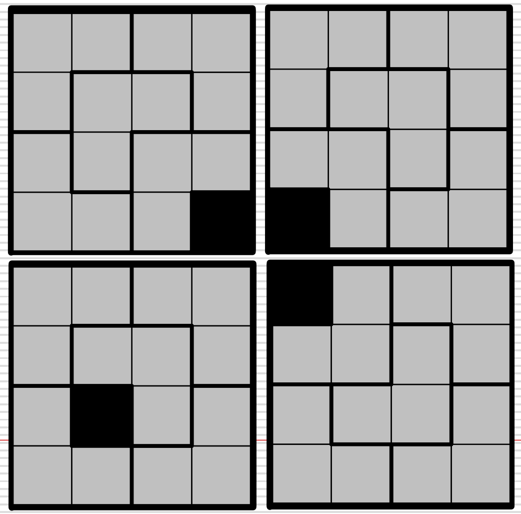
- **Σκακιέρα** τάξης **n**: τετράγωνη σκακιέρα με $2^n \times 2^n$ τετράγωνα, όλα λευκά εκτός από ένα μαύρο (οποιοδήποτε).
- Ν.δ.ο. για κάθε $n \geq 0$, λευκά τετράγωνα σκακιέρας τάξης n καλύπτονται από πλακίδια σχήματος L (μη επικαλυπτόμενα).
  - Πρόταση P'(n) ισχυρότερη από αρχική P(n).
  - Βάση: P'(0) ισχύει τετριμένα.
  - Επαγωγική υπόθεση: για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 0$, αληθεύει ότι λευκά τετράγωνα **οποιασδήποτε** σκακιέρας τάξης n καλύπτονται από πλακίδια σχήματος L.

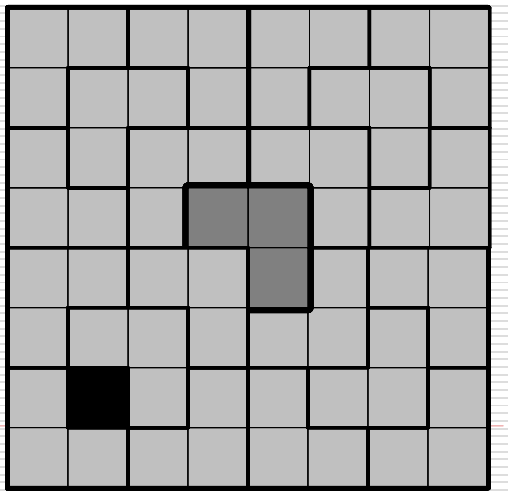


Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Σκακιέρα τάξης n+1: 4 σκακιέρες τάξης n (τεταρτημόρια).
  - 1 με μαύρο τετράγωνο σε αντίστοιχη θέση.
  - 3 με μαύρα τετράγωνα σε άκρα, ώστε γειτονικά κεντρικά τετράγωνα σε σκακιέρα n+1.
- Από επαγωγική υπόθεση, λευκά τετράγωνα σε τεταρτημόρια καλύπτονται από πλακίδια L.
- Νέα λευκά τετράγωνα σχηματίζουν L: καλύπτονται με πλακίδιο.







Παράδειγμα Ισχυρής Επαγωγής

- Νδο κάθε τμήμα τουλ. 18 φοιτητών διαμερίζεται σε ομάδες 4 ή 7 φοιτητών.
  - Για κάθε φυσικό $n \geq 18$, υπάρχουν φυσικοί κ_n, λ_n: $n = 4\kappa_n + 7\lambda_n$.
- Βάση: επαλήθευση για $n = 18, 19, 20, 21$.
- Επαγωγική υπόθεση: για (αυθαίρετα επιλεγμ.) φυσικό $n \geq 21$, ισχύει ότι για κάθε φυσικό m, $18 \leq m \leq n$:
  - Υπάρχουν φυσικοί κ_m, λ_m: $m = 4\kappa_m + 7\lambda_m$.
- Επαγωγικό βήμα: Θδο υπάρχουν φυσικοί κ_{n+1}, λ_{n+1}:

$$n+1 = 4\kappa_{n+1} + 7\lambda_{n+1}.$$

  - Επαγ. υπόθεση για $n - 3$, και $\kappa_{n+1} = \kappa_{n-3} + 1$ και $\lambda_{n+1} = \lambda_{n-3}$:

$$4(\kappa_{n-3} + 1) + 7\lambda_{n-3} = \overbrace{(4\kappa_{n-3} + 7\lambda_{n-3})}^{=n-3} + 4 = n + 1$$

- Αρκεί βάση για $n = 18$; Γιατί $n \geq 21$ στην υπόθεση;

Και Άλλο Λάθος!

- Θδο όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι άρτιοι(;)!
  - Βάση: ισχύει ότι το 0 είναι άρτιος.
  - Επαγωγική υπόθεση: για (αυθαίρετα επιλεγμένο) φυσικό $n \geq 0$, ισχύει ότι για κάθε m, $0 \leq m \leq n$, το m είναι άρτιος.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο το $n+1$ είναι άρτιος.
    - Επαγωγική υπόθεση: το n και το 1 είναι άρτιοι.
    - Άρα $n+1$ άρτιος, ως άθροισμα δύο άρτιων!
- Απόδειξη βήματος **δεν** ισχύει για $n = 0$!
  - Χρησιμοποιεί ότι το 1 είναι άρτιος χωρίς απόδειξη (στη βάση) και χωρίς να εμπίπτει στην επαγωγική υπόθεση!