Μαθηματική Επαγωγή

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Τεχνικές Απόδειξης

- Εξαντλητική μέθοδος: πεπερασμένος αριθμός περιπτώσεων.
- Απόδειξη για $p \to q$:
  - Ευθέως: αιτιολογούμε ότι συμπέρασμα q έπεται από υπόθεση p.
  - Αντιθετοαναστροφή: αιτιολογούμε ότι η άρνηση της υπόθεσης ($\neg p$) έπεται από την άρνηση του συμπεράσματος ($\neg q$).
    - Ιδιότητα $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
    - Π.χ. αν n^2 άρτιος, τότε n άρτιος.
  - Απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε ότι $\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$ και αιτιολογούμε αντίφαση.
    - Π.χ. το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (Πυθαγόρας).
- Μαθηματική Επαγωγή.

Αποδείξεις Ύπαρξης

- Κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης.
  - Αλγόριθμος κατασκευής του ζητούμενου.
- Μη κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης.
  - Αρχή περιστερώνα.
    - Αν m μπάλες σε n κουτιά και m > n, τότε κάποιο κουτί έχει περισσότερες από 1 μπάλες.
  - Επιχειρήματα ισοτιμίας και καταμέτρησης.
    - Κάθε ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα με «πηγή», έχει «καταβόθρα».
    - Κάθε (μη κατευθυνόμενο) γράφημα έχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού.
  - Πιθανοτική μέθοδος.
    - Αν κάτι έχει θετική πιθανότητα να επιλεγεί από (κατάλληλο) δειγματοχώρο, τότε υπάρχει.

Μαθηματική Επαγωγή

- Αποδεικνύουμε ότι «P(n) αληθεύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$».
  - **Δομική επαγωγή**: όλα τα στοιχεία (αριθμήσιμα) άπειρου συνόλου που ορίζεται αναδρομικά έχουν ιδιότητα P.

Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής

- Έστω P(n) μια πρόταση που εξαρτάται από φυσικό αριθμό n.
- Για νδο P(n) αληθεύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$, αρκεί νδο:
  - **Βάση**: το $P(n_0)$ αληθεύει.
  - **Βήμα**: για κάθε $n \geq n_0$, αν P(n) αληθεύει, τότε P(n+1) αληθεύει.

Αρχή Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής

- Για νδο P(n) αληθεύει για κάθε $n \geq n_0$, αρκεί νδο:
  - **Βάση**: το $P(n_0)$ αληθεύει.
  - **Βήμα**: για κάθε $n \geq n_0$, αν P(k) αληθεύει για κάθε $k \in \{n_0, \dots, n\}$, τότε P(n+1) αληθεύει.

Όροι Γεωμετρικής Προόδου

- Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 0$, $1+2+...+2^n = 2^{n+1} - 1$.
  - Πρόταση $P(n) \equiv$ «$1+2+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$».
  - Βάση: Αληθεύει για $n = 0$: $2^0 = 1 = 2 - 1$.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 0$, αληθεύει $P(n)$, δηλ. ότι $1+2+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο αληθεύει $P(n+1)$, δηλ. ότι $1+2+\ldots+2^n+2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$.

$$\begin{aligned}\overbrace{1+2+2^2\ldots+2^n}^{=2^{n+1}-1}+2^{n+1} &= 2^{n+1}-1+2^{n+1}\\ &= 2^{n+2}-1\end{aligned}$$

- Νδο για κάθε $r \neq 1$ και $n \geq 0$,

$$1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

Αρμονικοί Αριθμοί

- Αρμονικός αριθμός τάξης k: $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$
- Να δείξετε ότι για κάθε n ≥ 0, $1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$
  - Συνεπώς $1 + \frac{1}{2}\log_2 k \leq H_k \leq 1 + \log_2 k$
  - Άνω φράγμα, πρόταση P(n) ≡ « $H_{2^n} \leq 1 + n$ »
  - Βάση: Αληθεύει για n = 0: $H_1 = 1 = 1+0$.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) n ≥ 0, αληθεύει P(n), δηλ. ότι $H_{2^n} \leq 1 + n$

Αρμονικοί Αριθμοί

- Επαγωγικό βήμα: Θδο αληθεύει P(n+1), δηλ. ότι $H_{2^{n+1}} \leq 1 + (n+1)$

$$H_{2^{n+1}} = \overbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}^{=H_{2^n} \leq 1+n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\leq 1 + n + \overbrace{\frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}^{2^n \text{ όροι} < \frac{1}{2^n}}$$

$$\leq 1 + n + 2^n \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 + (n+1)$$

Διαιρετότητα

- Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, το n^3+2n διαιρείται από το 3.
  - Βάση: Αληθεύει για $n = 1$: Το 3 διαιρείται από το 3.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 1$, το $n^3 + 2n$ διαιρείται από το 3.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο το $(n+1)^3 + 2(n+1)$ διαιρείται από το 3.
  - Πράγματι,

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2(n+1) \\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\,,\end{aligned}$$

όπου και οι δύο όροι διαιρούνται από το 3 (ο 1ος λόγω της επαγωγικής υπόθεσης).