



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών
Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτάκης
3η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 10/6/2010

Θέμα 1 (Συνδυαστική, 1.2 μονάδες). (α) Έχουμε 4 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία με πάχος 5 εκατοστά το καθένα. Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να γεμίσει ένα ράφι που έχει μήκος 1 μέτρο, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων στο ράφι.
(β) Έχουμε στη διάθεσή μας 10 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία με πάχος 5 εκατοστά το καθένα. Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να τοποθετηθούν όλα τα βιβλία σε 3 διακεκομμένα ράφια μήκους 2 μέτρων το καθένα, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι.

Θέμα 2 (Συνδυαστική, 1.4 μονάδες). (α) Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να καθήσουν 20 (διακεκομμένοι) φοιτητές σε μια σειρά 90 θρανίων, ώστε να υπάρχουν τουλάχιστον δύο κενά θρανία ανάμεσα σε κάθε δύο φοιτητές.

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να μοιράσουμε 30 ίδια κουπόνια σίτισης σε 5 φοιτητές, ώστε κάθε φοιτητής να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 10 κουπόνια.

(γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να κατανεύσουμε 40 φοιτητές σε 4 διαφορετικά εστιατόρια ώστε κανένα εστιατόριο να μην μείνει άδειο, αν η κατανομή καθορίζει και τη σειρά με την οποία οι φοιτητές γευματίζουν.

Θέμα 3 (Συνδυαστική, 0.8 μονάδες). Σε ένα ντουλάπι υπάρχουν 10 ζευγάρια παπουτσιών (κάθε ζευγάρι αποτελείται από ένα δεξί και από ένα αριστερό παπούτσι, και κάθε ζευγάρι είναι διαφορετικό από οποιοδήποτε άλλο). Αν επιλέξουμε τυχαία 8 παπούτσια, ποια η πιθανότητα να μην επιλέξουμε κανένα ζευγάρι παπουτσιών και ποια η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα ακριβώς ζευγάρι παπουτσιών;

Θέμα 4 (Συνδυαστική, 0.8 μονάδες). Έχουμε n θέσεις στις οποίες θα καθήσουν $k + m$ καλεσμένοι, k (διακεκομμένοι) άνδρες και m (διακεκομμένες) γυναίκες, $n \geq \max\{k + m, 2k\}$. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθήσουν οι καλεσμένοι αν δεν μπορούν να κάθονται άνδρες σε διπλανές θέσεις (δηλ. ανάμεσα σε δύο άνδρες πρέπει να μεσολαβεί τουλάχιστον μία θέση που είτε είναι κενή είτε καταλαμβάνεται από γυναίκα) αν:

1. οι καλεσμένοι κάθονται σε μία σειρά;
2. οι καλεσμένοι κάθονται σε ένα κυκλικό τραπέζι; Να θεωρήσετε ως διαφορετικά τα ενδεχόμενα ο A να κάθεται δεξιά του B και ο A να κάθεται αριστερά του B .

Θέμα 5 (0.9 μονάδες). Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε n (διακεκομμένους) φοιτητές σε 6 (διακεκομμένα) αμφιθέατρα ώστε κανένα αμφιθέατρο να μην μείνει κενό, το πρώτο και το τρίτο αμφιθέατρο να έχουν περιττό αριθμό φοιτητών, και το δεύτερο και το τέταρτο αμφιθέατρο να έχουν άρτιο αριθμό φοιτητών.

Θέμα 6 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.2 μονάδες). Έχουμε n ίδιες πράσινες μπάλες και k αριθμημένες (διακεκομμένες) κόκκινες μπάλες που διανέμονται σε m διακεκομμένες υποδοχές. Θεωρούμε ότι $m \leq$

$\min\{k, n\}$, και ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία τοποθετούνται οι μπάλες στις υποδοχές. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων για:

1. την διανομή των πράσινων και των κόκκινων μπαλών στις υποδοχές ώστε καμία υποδοχή να μην μείνει κενή και κάθε υποδοχή να έχει ίδιο αριθμό από πράσινες και κόκκινες μπάλες (μόνο για αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι $k = n$).
2. την διανομή των πράσινων και των κόκκινων μπαλών στις υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή να έχει τουλάχιστον μία πράσινη και τουλάχιστον μία κόκκινη μπάλα.

Θέμα 7 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.2 μονάδες). (α) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετηθούν 200 διαφορετικά βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια, όταν:

1. κάθε ράφι πρέπει να έχει τουλάχιστον 10 και το πολύ 100 βιβλία, και δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα βιβλία σε κάθε ράφι.
2. κάθε ράφι πρέπει να έχει περισσότερα βιβλία από το επόμενο του, το πρώτο ράφι δεν πρέπει να μείνει κενό, και έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα βιβλία στα ράφια.

Θέμα 8 (Αναδρομικές Σχέσεις, 1 μονάδα). Να υπολογίσετε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας της οποίας ο n -οστός όρος δίνει τον αριθμό των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους n που δεν περιέχουν την υποσυμβολοσειρά 111. *Υπόδειξη:* Να διατυπώσετε την αντίστοιχη αναδρομική σχέση, και να την επιλύσετε με την μέθοδο των Γεννητριών Συναρτήσεων.

Θέμα 9 (Αρχή Περιστερώνα, 1.5 μονάδες). (α) Να δείξετε ότι ανάμεσα σε $n+2$ αυθαίρετα επιλεγμένους ακέραιους, είτε υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται από το $2n$ είτε υπάρχουν δύο που το άθροισμά τους διαιρείται από το $2n$.

(β) Έστω n αυθαίρετα επιλεγμένοι ακέραιοι a_1, a_2, \dots, a_n . Να δείξετε ότι υπάρχουν φυσικοί ℓ, k , $1 \leq \ell \leq n$, $0 \leq k \leq n - \ell$, τέτοιοι ώστε το άθροισμα $a_\ell + a_{\ell+1} + \dots + a_{\ell+k}$ να διαιρείται από το n .

Παράδοση. Η εργασία είναι **ατομική**. Οι εργασίες θα παραδοθούν στο (τελευταίο) μάθημα της Πέμπτης 10/6.

Καλή Επιτυχία!