Πεπερασμένα Αυτόματα

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

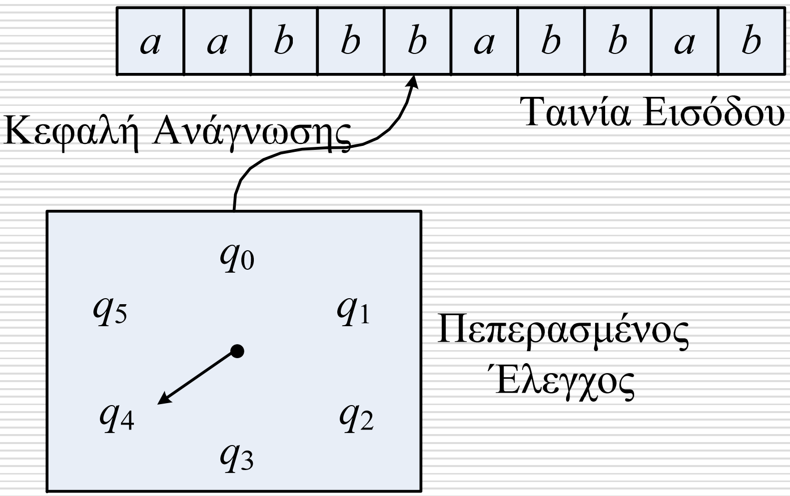
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

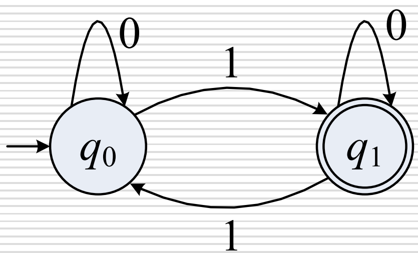
Πεπερασμένα Αυτόματα

- … είναι απλούστερες υπολογιστικές μηχανές.
  - «Κεντρική Μονάδα» με πεπερασμένο #καταστάσεων. Όχι άλλη μνήμη.
  - Είσοδος σειριακά από ταινία μέσω κεφαλής ανάγνωσης.
  - Νέο σύμβολο εισόδου εξετάζεται μία φορά, και προκαλεί αλλαγή κατάστασης.
  - Όχι έξοδος εκτός από χαρακτηρισμό τελευταίας κατάστασης ως κατάσταση αποδοχής.



Ορισμός

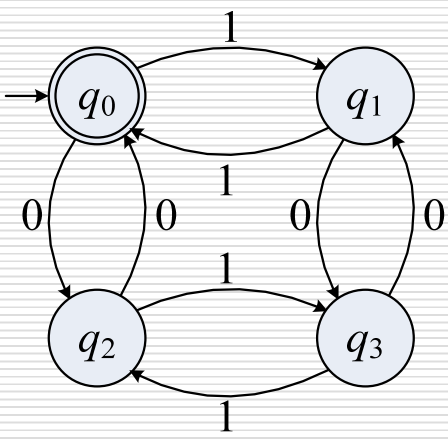
- Ένα **ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο** (DFA) είναι μια πεντάδα $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ όπου:
  - Q ένα πεπερασμένο σύνολο **καταστάσεων**.
  - Σ ένα **αλφάβητο** (εισόδου).
  - $s \in Q$ η **αρχική κατάσταση**.
  - $F \subseteq Q$ το σύνολο **καταστάσεων αποδοχής**.
  - $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$ η **συνάρτηση μετάβασης**.



$$Q = \{q_0, q_1\},$$
$$\Sigma = \{0, 1\},$$
$$s = q_0,$$
$$F = \{q_1\}$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_1
q_1	1	q_0

Παράδειγμα

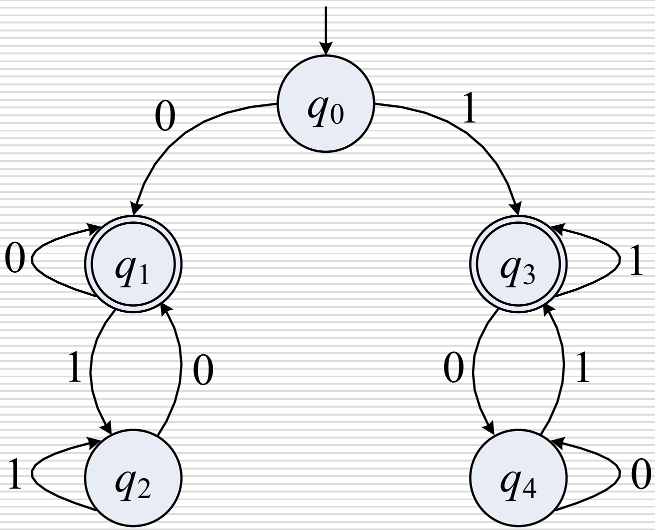


$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}\,,$$
$$\Sigma = \{0, 1\}\,,$$
$$s = q_0\,,$$
$$F = \{q_0\}$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_2
q_0	1	q_1
q_1	0	q_3
q_1	1	q_0
q_2	0	q_0
q_2	1	q_3
q_3	0	q_1
q_3	1	q_2

- Αποδέχεται συμβολοσειρές με ζυγό αριθμό 0 και 1.
- Αν αλλάξουμε τελικές καταστάσεις;

Παράδειγμα



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}\,,$$
$$\Sigma = \{0, 1\}\,,$$
$$s = q_0\,,$$
$$F = \{q_1, q_3\}$$

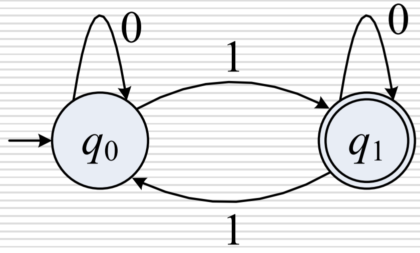
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_1
q_0	1	q_3
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2
q_3	0	q_4
q_3	1	q_3
q_4	0	q_4
q_4	1	q_3

- Αποδέχεται δυαδικές συμβολοσειρές που αρχίζουν και τελειώνουν με το ίδιο σύμβολο.

Υπολογισμός DFA

- DFA *M*(*Q*, *Σ*, *δ*, *s*, *F*) **αποδέχεται** συμβ/ρά *w* αν ξεκινώντας από αρχική κατάσταση *s*, αφού επεξεργαστεί το *w*, καταλήγει σε κατάσταση αποδοχής.
- **Συνολική κατάσταση** (configuration) $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$
  - *q* τρέχουσα κατάσταση.
  - *w* είσοδος που δεν έχει επεξεργασθεί ακόμη.
- Συνάρτηση **παράγει άμεσα** $\vdash_M : Q \times \Sigma^+ \mapsto Q \times \Sigma^*$
  - $(q, w) \vdash_M (q', w')$ αν και μόνο αν
    - $w = \sigma w'$ για κάποιο $\sigma \in \Sigma$
    - $\delta(q, \sigma) = q'$

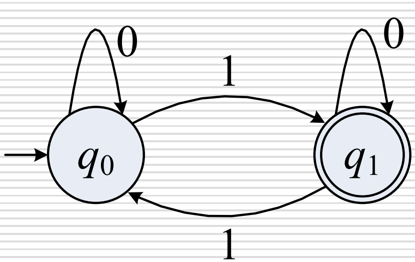
Παράδειγμα



$$
\begin{aligned}
(q_0, 011010) &\vdash_M (q_0, 11010) \\
&\vdash_M (q_1, 1010) \\
&\vdash_M (q_0, 010) \\
&\vdash_M (q_0, 10) \\
&\vdash_M (q_1, 0) \\
&\vdash_M (q_1, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Υπολογισμός DFA

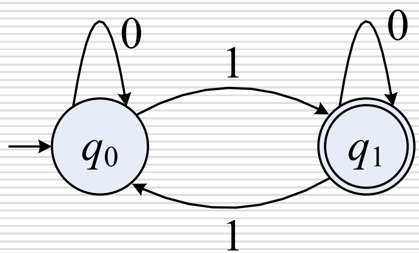
- Σχέση **παράγει** $\vdash_M^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$
  - $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ αν και μόνο αν υπάρχουν $n \geq 0$, $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \in Q$ και $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ τέτοια ώστε:
    - $w = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w'$ και
    - $\delta(q, \sigma_1) = q_1, \delta(q_1, \sigma_2) = q_2, \ldots, \delta(q_{n-1}, \sigma_n) = q'$
  - Άρα $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ ανν $(q, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M \cdots \vdash_M (q', w')$



$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_0, 11010)$$
$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_0, 010)$$
$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_1, 0)$$
$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_1, \varepsilon)$$

Υπολογισμός DFA

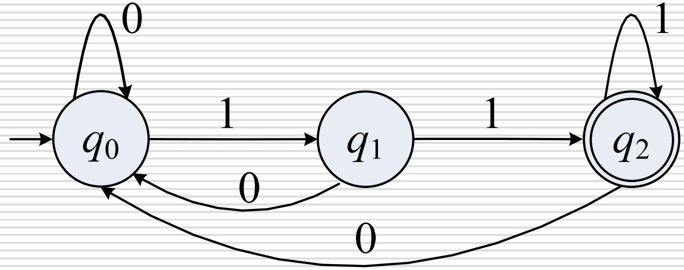
- DFA *M* δέχεται συμβ/ρά *w* ή *w* είναι αποδεκτό από *M* όταν
  - για κάποιο $q \in F, (s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$
- Γλώσσα *M* : $L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ είναι αποδεκτό από } M\}$
- Γλώσσα εικονιζόμενου DFA;



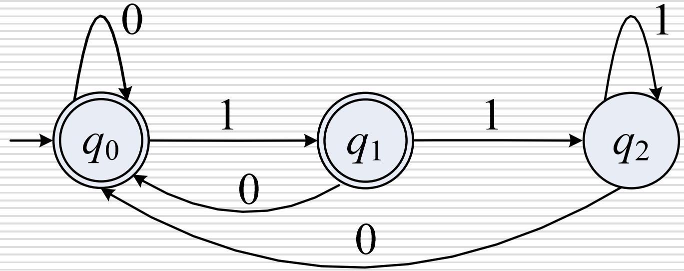
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ περιέχει περιττό αριθμό από } 1\}$$

Παράδειγμα

- DFA που δέχεται $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \textbf{ τελειώνει σε } 11\}$

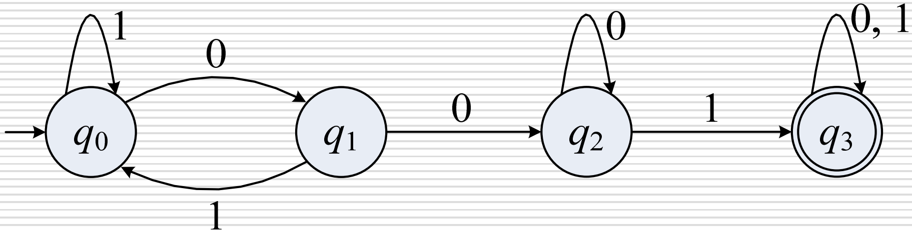


- DFA που δέχεται $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \textbf{ δεν τελειώνει σε } 11\}$

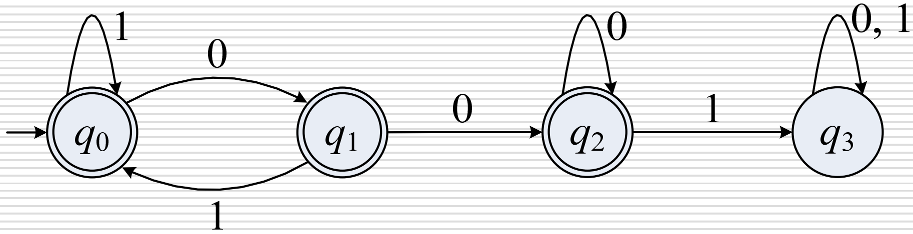


Παράδειγμα

- DFA που δέχεται $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ περιέχει } 001\}$



- DFA που δέχεται $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ δεν περιέχει } 001\}$



Μη Ντετερμινισμός

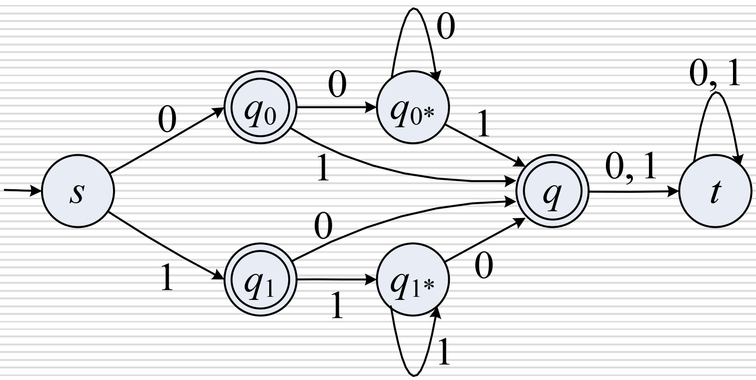
- **Ντετερμινισμός**: επόμενη κατάσταση **καθορίζεται** από τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου.
  - **Συνάρτηση** μετάβασης δ.
- **Μη Ντετερμινισμός**: αλλαγή κατάστασης **προσδιορίζεται μερικά** από τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου.
  - Τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου: υπάρχουν καμία ή περισσότερες επόμενες καταστάσεις.
  - Μετάβαση χωρίς να «καταναλωθεί» σύμβολο εισόδου.
  - **Σχέση** (και **όχι συνάρτηση**) μετάβασης Δ.
    - Ισοδύναμα, συνάρτηση $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \mapsto \mathcal{P}(Q)$
  - Συμβ/ρά εισόδου αποδεκτή αν **υπάρχει** ακολουθία που οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής (όπου έχει «καταναλωθεί» είσοδος).

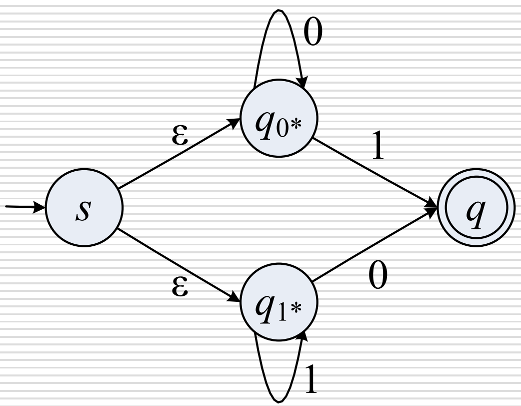
Παράδειγμα

$0^*1 \cup 1^*0$

- Ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει

  L = {w ∈ {0, 1}*: w έχει είτε ένα μόνο 1 στο τέλος
  είτε ένα μόνο 0 στο τέλος }





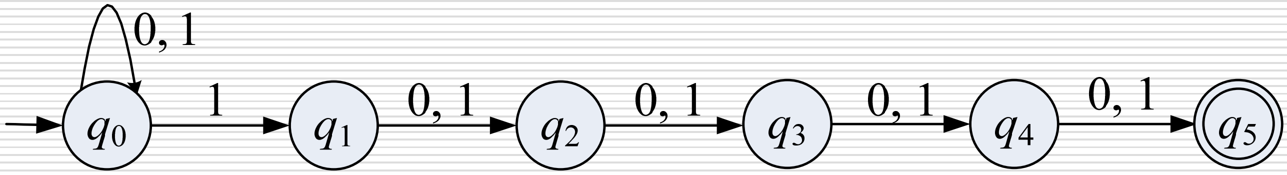
- Μη ντετερμινιστικό αυτόματο για L.
  - Αποδέχεται αν **υπάρχει** τρόπος μετάβασης από s → q
    - Αν υπάρχει, τον «μαντεύει» (δεν κάνει ποτέ λάθος)
    - Εκτελεί όλες τις επιτρεπτές μεταβάσεις παράλληλα.
  - Υπολογισμός για 0001 και 00011.

Παράδειγμα

- Ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει

  $$L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ έχει 1 στην 5η θέση από δεξιά}\}$$

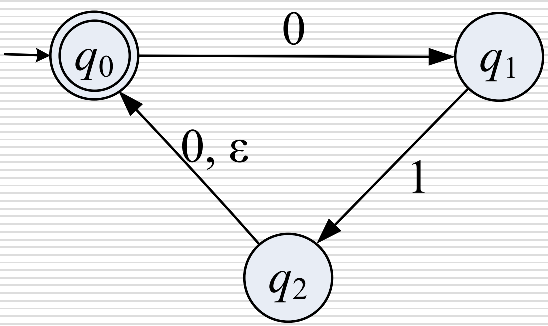
  - Ο **ελάχιστος** #καταστάσεων είναι **32.**
- Μη ντετερμινιστικό αυτόματο;



  - Υπολογισμός για 000, 11101111, 11111, 00010000.
  - Παράδειγμα δέντρου υπολογισμού.

Ορισμός

- Ένα **μη ντετερμινιστικό** πεπερασμένο αυτόματο (NFA) είναι μια πεντάδα $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ όπου:
  - Q ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων.
  - Σ ένα αλφάβητο (εισόδου).
  - $s \in Q$ η αρχική κατάσταση.
  - $F \subseteq Q$ το σύνολο των καταστάσεων αποδοχής.
  - $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ η **σχέση** μετάβασης.



$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$,

$\Sigma = \{0, 1\}$,

$s = q_0$,

$F = \{q_0\}$

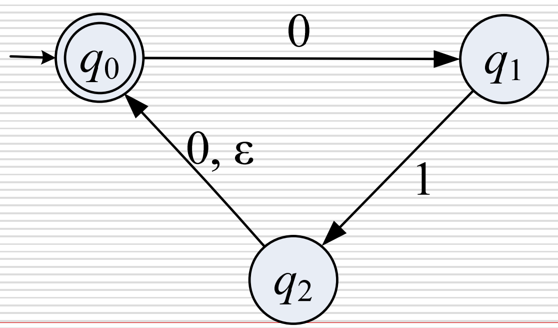
Σχέση Δ
$(q_0, 0, q_1)$
$(q_1, 1, q_2)$
$(q_2, 1, q_0)$
(q_2, ε, q_0)

Υπολογισμός NFA

- *M*(*K*, *Σ*, *Δ*, *s*, *F*) **αποδέχεται** συμβ/ρά *w* αν ξεκινώντας από αρχική κατάσταση *s*, αφού επεξεργαστεί *w*, το *M* **μπορεί να καταλήξει** σε κάποια κατάσταση αποδοχής.
- **Συνολική κατάσταση** (configuration) $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$
  - *q* τρέχουσα κατάσταση (αλλά μπορεί σε **πολλές**!).
  - *w* είσοδος που δεν έχει επεξεργασθεί ακόμη.
- Σχέση **παράγει άμεσα** $\vdash_M \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$
  - $(q, w) \vdash_M (q', w')$ αν και μόνο αν
    - $w = \sigma w'$ για κάποιο $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
    - $(q, \sigma, q') \in \Delta$

Υπολογισμός NFA

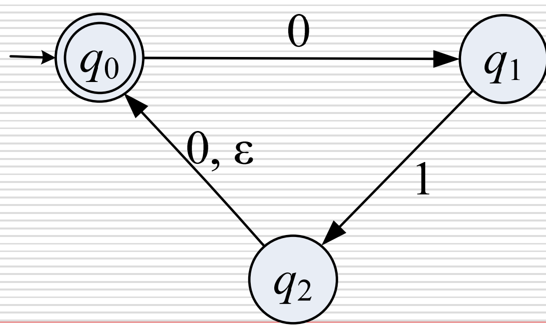
- Σχέση **παράγει** $\vdash_M^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$
  - $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ αν και μόνο αν υπάρχουν $n \geq 0$, $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \in Q$ και $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ τέτοια ώστε:
    - $w = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w'$ και
    - $(q, \sigma_1, q_1), (q_1, \sigma_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, \sigma_n, q') \in \Delta$
  - Άρα $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ ανν δύναται $(q, \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M \cdots \vdash_M (q', w')$



$$(q_0, 01010) \vdash_M (q_1, 1010)$$
$$(q_1, 1010) \vdash_M (q_2, 010)$$
$$(q_2, 010) \vdash_M (q_0, 010)$$
$$(q_0, 010) \vdash_M (q_1, 10)$$
$$(q_1, 10) \vdash_M (q_2, 0)$$
$$(q_2, 0) \vdash_M (q_0, \varepsilon)$$

Υπολογισμός NFA

- Σχέση **παράγει** $\vdash^*_M \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q \times \Sigma^*$
  - $(q, w) \vdash^*_M (q', w')$ αν και μόνο αν υπάρχουν $n \geq 0$,
    $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \in Q$ και $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ τέτοια ώστε:
    - $w = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w'$ και
    - $(q, \sigma_1, q_1), (q_1, \sigma_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, \sigma_n, q') \in \Delta$
  - Άρα $(q, w) \vdash^*_M (q', w')$ ανν δύναται
    $(q, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M \cdots \vdash_M (q', w')$

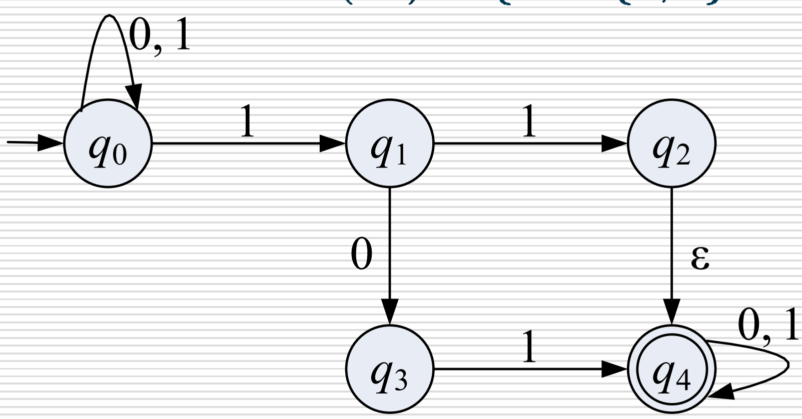


$(q_0, 01010) \vdash^*_M (q_0, \varepsilon)$
$(q_0, 01010) \vdash^*_M (q_0, 10)$

Υπολογισμός NFA

- NFA *M* δέχεται συμβ/ρά *w* ή *w* είναι αποδεκτό από *M* όταν
  - για κάποιο $q \in F, (s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$
- Γλώσσα *M* : $L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ είναι αποδεκτό από } M\}$
- Γλώσσα εικονιζόμενου NFA;

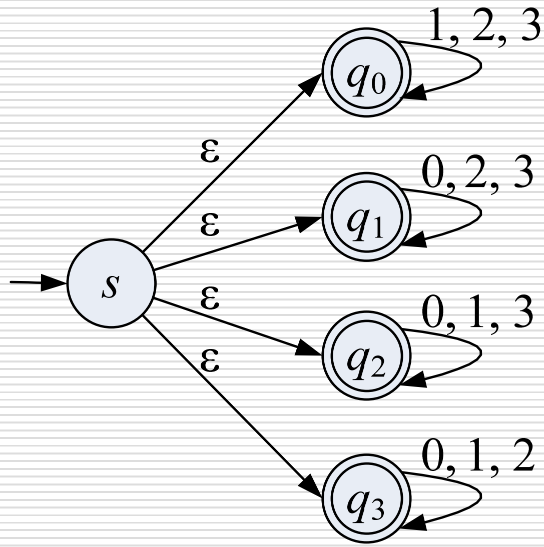
$$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ περιέχει } 11 \text{ ή } 101\}$$



Παράδειγμα

- NFA που δέχεται

$L = \{w \in \{0, 1, 2, 3\}^* : \exists a \in \Sigma \text{ που δεν εμφανίζεται στο } w\}$



Μη Ντετερμινισμός

- Ντετερμινιστικός υπολογισμός: **μονοπάτι**.
  - Αποδοχή αν καταλήγει σε κατάσταση αποδοχής.
- Μη ντετερμινιστικός υπολογισμός: **δέντρο**.
  - Αποδοχή αν **υπάρχει** κλάδος που οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής.
- Ντετερμινιστικές μηχανές αποτελούν ειδική περίπτωση μη ντετερμινιστικών.
- **Δεν** πρόκειται για ρεαλιστικό μοντέλο υπολογισμού.
  - Διευκολύνουν σχεδιασμό και έλεγχο λειτουργίας.
  - Λειτουργία πιο κοντά στην «ανθρώπινη σκέψη».
  - Ντετερμινιστική προσομοίωση: λειτουργική ισοδυναμία. «Είναι αποτελεσματική;» αποτελεί την ουσία του P vs NP.

Ισοδυναμία DFA και NFA

- Αυτόματα M_1 και M_2 **ισοδύναμα**: $L(M_1) = L(M_2)$.
  - Αναγνωρίζουν ίδια γλώσσα με (ενδεχ.) διαφορετική μέθοδο.
- DFA είναι ειδική περίπτωση των NFA.
- Για κάθε **NFA** αυτόματο M(Q, Σ, Δ, s, F), υπάρχει ισοδύναμο **DFA** M′(Q′, Σ, δ′, s′, F′).
  - Δ ορίζεται ισοδύναμα ως $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \mapsto \mathcal{P}(Q)$
  - NFA βρίσκεται (παράλληλα) σε σύνολο καταστάσεων:
    - Καταστάσεις M′ είναι υποσύνολα Q, $\mathbf{Q' \subseteq \mathit{P}(Q)}$
  - Επόμενη κατάσταση M′: **σύνολο καταστάσεων** όπου καταλήγει M από **τρέχον σύνολο καταστάσεων** με συγκεκριμένο **σύμβολο εισόδου**.

Ισοδυναμία NFA και DFA

- Για μεταβάσεις με ε (κενή συμβολοσειρά):
  - Σύνολο καταστάσεων προσιτό από q χωρίς είσοδο.

$$E(q) = \{p \in Q : (q, \varepsilon) \vdash_M^* (p, \varepsilon)\}$$

- Περιγραφή ντετερμινιστικού Μ′:

$$Q' = \mathcal{P}(Q) \quad \text{Όλα τα υποσύνολα του } Q$$

$$s' = E(s) \quad \text{Σύνολο με κατ. προσπελάσιμες από } s \text{ με } \varepsilon$$

$$F' = \{S \in \mathcal{P}(Q) : S \cap F \neq \emptyset\} \quad \text{Σύνολα με κατ. αποδοχής του } M$$

$$\delta'(S, \sigma) = \bigcup_{p \in Q:\, \exists q \in S \text{ τ.ω. } (q,\sigma,p) \in \Delta} E(p) \qquad \forall S \in \mathcal{P}(Q), \forall \sigma \in \Sigma$$

- DFA M′ προσομοιώνει NFA M (απόδειξη με επαγωγή στο |w|):

$$\forall w \in \Sigma^*, \forall q, p \in Q, \exists S_q, S_p \subseteq Q, E(q) \subseteq S_q, p \in S_p :$$

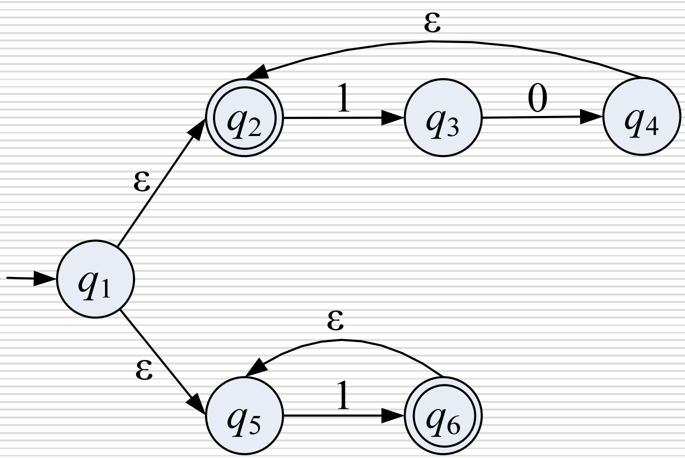
$$(q, w) \vdash_M^* (p, \varepsilon) \Leftrightarrow (S_q, w) \vdash_{M'}^* (S_p, \varepsilon)$$

Παράδειγμα

- Κατασκευαστική απόδειξη (εκθετικός χρόνος λόγω P(Q)).

$$\delta'(S,\sigma) = \bigcup_{p\in Q:\ \exists q\in S \text{ τ.ω. } (q,\sigma,p)\in\Delta} E(p)$$

$$= \{p \in Q : (q,\sigma) \vdash_M^* (p,\varepsilon) \text{ για κάποιο } q \in S\}$$



$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_5\}$

$E(q_2) = \{q_2\}$

$E(q_3) = \{q_3\}$

$E(q_4) = \{q_2, q_4\}$

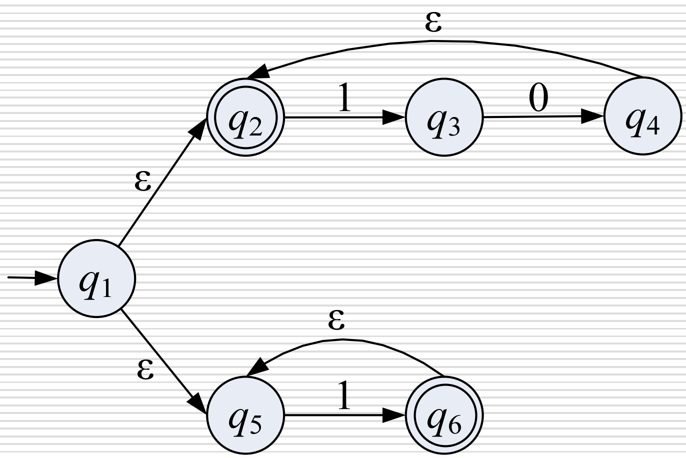
$E(q_5) = \{q_5\}$

$E(q_6) = \{q_5, q_6\}$

$s' = \{q_1, q_2, q_5\}$

Παράδειγμα

$$\delta'(S,\sigma) = \bigcup_{p \in Q:\, q \in S \wedge (q,\sigma,p) \in \Delta} E(p)$$



q	σ	$\delta(q,\sigma)$
$\{q_1, q_2, q_5\}$	0	$\emptyset$
$\{q_1, q_2, q_5\}$	1	$\{q_3, q_5, q_6\}$
$\{q_3, q_5, q_6\}$	0	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_3, q_5, q_6\}$	1	$\{q_5, q_6\}$
$\{q_2, q_4\}$	0	$\emptyset$
$\{q_2, q_4\}$	1	$\{q_3\}$
$\{q_5, q_6\}$	0	$\emptyset$
$\{q_5, q_6\}$	1	$\{q_5, q_6\}$
$\{q_3\}$	0	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_3\}$	1	$\emptyset$
$\emptyset$	0	$\emptyset$
$\emptyset$	1	$\emptyset$

Παράδειγμα

$$\delta'(S,\sigma) = \bigcup_{p\in Q:\, \exists q\in S \text{ τ.ω. } (q,\sigma,p)\in \Delta} E(p)$$