

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

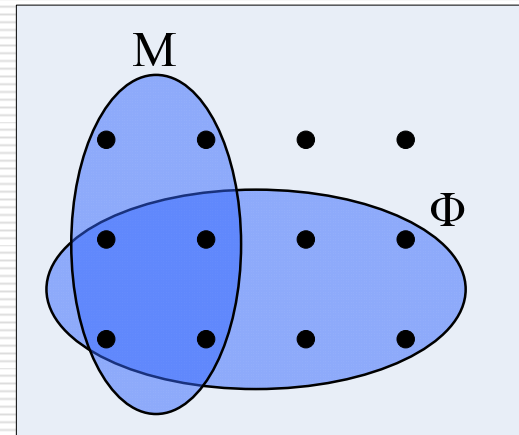


Πληθικός Αριθμός Ένωσης

- Πληθικός αριθμός (πεπερασμένων) συνόλων που προκύπτουν από πράξεις (ένωση, τομή) συνόλων:
 - Π.χ. $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A - B|$, $|\overline{A}|$ σε σχέση με $|A|$, $|B|$.
 - $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$,
 $|A - B| \geq |A| - |B|$, $|\overline{A}| = |U| - |A|$. Πότε ισχύουν ισότητες;
- Σύνολο 12 βιβλίων: 6 βιβλία μαθηματικά, 8 βιβλία φυσική, και 4 μαθηματικά και φυσική.
 - Πόσα μαθηματικά ή φυσική;
Πόσα ούτε μαθηματικά ούτε φυσική;

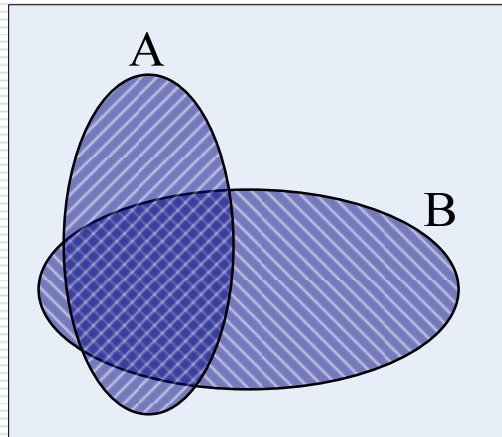
$$|M \cup \Phi| = |M| + |\Phi| - |M \cap \Phi| = 6 + 8 - 4 = 10$$

$$|\overline{M \cup \Phi}| = |U| - |M \cup \Phi| = 12 - 10 = 2$$



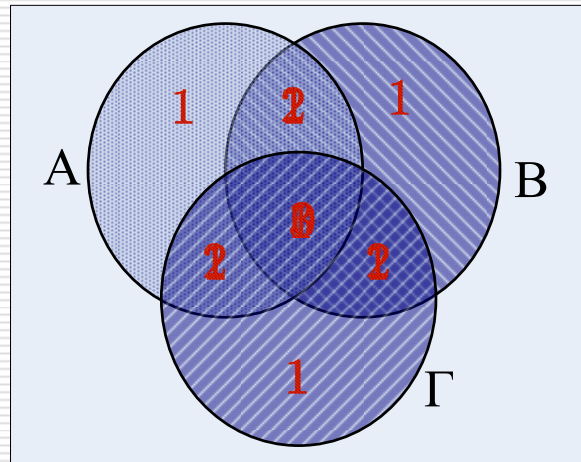
Εγκλεισμός – Αποκλεισμός

- Πληθικός αριθμός ένωσης πεπερασμένων συνόλων.
- Δύο σύνολα A, B : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
 - Στο $|A| + |B|$ μετράμε **διπλά** τα στοιχεία στο $|A \cap B|$.
Ο όρος $- |A \cap B|$ διορθώνει το λάθος.



Εγκλεισμός – Αποκλεισμός

- Τρία σύνολα A, B, Γ: $|A \cup B \cup \Gamma|$
 - $|A| + |B| + |\Gamma|$
 - $|A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |B \cap \Gamma|$
 - $|A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |B \cap \Gamma| + |A \cap B \cap \Gamma|$



Παράδειγμα

- 200 φοιτητές, 140 Πληροφορική, 50 Διακριτά, 24 αμφότερα.
 - Πόσοι φοιτητές Πληροφορική ή Διακριτά;
 - $|\Pi \cup \Delta| = |\Pi| + |\Delta| - |\Pi \cap \Delta| = 140 + 50 - 24 = 166.$
 - Πόσοι φοιτητές ούτε Πληροφορική ούτε Διακριτά;
 - $|\overline{\Pi \cap \Delta}| = |\overline{\Pi \cup \Delta}| = |\Phi| - |\Pi \cup \Delta| = 200 - 166 = 34$
- Από αυτούς τους 200 φοιτητές, 60 πήγαν στο Συνέδριο.
Από αυτούς 20 Διακριτά, 45 Πληροφορική, και 16 αμφότερα.
 - Πόσοι φοιτητές που δεν θα πάνε στο Συνέδριο δεν παρακολουθούν ούτε Πληροφορική ούτε Διακριτά.
 - $|\overline{\Sigma \cap \overline{\Pi \cap \Delta}}| = |\overline{\Sigma \cup \Pi \cup \Delta}| = |\Phi| - |\Sigma \cup \Pi \cup \Delta| = 23$
 - $|\Sigma \cup \Pi \cup \Delta| =$
 $|\Sigma| + |\Pi| + |\Delta| - |\Sigma \cap \Delta| - |\Sigma \cap \Pi| - |\Pi \cap \Delta| + |\Sigma \cap \Pi \cap \Delta| =$
 $60 + 140 + 50 - 20 - 45 - 24 + 16 = 177$

Παράδειγμα

- Πόσοι ακέραιοι στο $\{1, \dots, 1000\}$ διαιρούνται από το 7 ή το 11.
 - $A_7 = \{j \in [1000] : j \text{ διαιρείται από } 7\}$ $|A_7| = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$
 $A_{11} = \{j \in [1000] : j \text{ διαιρείται από } 11\}$ $|A_{11}| = \lfloor 1000/11 \rfloor = 90$
 - $|\{j \in [M] : j \text{ διαιρείται από } k\}| = \lfloor M/k \rfloor$
 - Ακέραιος j διαιρείται από k_1 και k_2 ανν j διαιρείται από ΕΚΠ(k_1, k_2).
 - $|A_7 \cap A_{11}| = \lfloor 1000/(7 \cdot 11) \rfloor = 12$
 - $|A_7 \cup A_{11}| = |A_7| + |A_{11}| - |A_7 \cap A_{11}| = 142 + 90 - 12 = 220.$
- Πόσοι ακέραιοι στο $\{1, \dots, 100\}$ διαιρούνται από 2, 3, ή 5.
 - $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5|$
 $- |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$
 - $\dots = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$

Γενίκευση

□ Τέσσερα σύνολα A, B, Γ, Δ : $|A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta|$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta| &= |A| + |B| + |\Gamma| + |\Delta| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |A \cap \Delta| \\ &\quad - |B \cap \Gamma| - |B \cap \Delta| - |\Gamma \cap \Delta| \\ &\quad + |A \cap B \cap \Gamma| + |A \cap B \cap \Delta| \\ &\quad + |A \cap \Gamma \cap \Delta| + |B \cap \Gamma \cap \Delta| \\ &\quad - |A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta| \end{aligned}$$

Γενίκευση

□ η σύνολα A_1, A_2, \dots, A_n : $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{J \subseteq [n]: |J|=k} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

- Αριθμός όρων για n σύνολα: $2^n - 1$
- Απόδειξη με **επαγωγή** στον αριθμό των συνόλων n .
- Απόδειξη **συνδυαστικά**: κάθε στοιχείο της ένωσης «μετριέται» μία φορά στο άθροισμα δεξιά.

Από 3 Σύνολα σε 4 Σύνολα

□ Εφαρμόζοντας τη βασική ιδέα της επαγωγικής απόδειξης:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4| \\ &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4| &= |(A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4)| \\ &= |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_4| + |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

Παράδειγμα

- 100 φοιτητές κυλικείο για καφέ, πίτσα, και μπουγάτσα.
 - Καθένα κοστίζει 1 ευρώ.
 - Συνολική είσπραξη 200 ευρώ.
 - 75 χάλασαν τουλάχιστον 2 ευρώ.
 - 30 χάλασαν 3 ευρώ.
 - **Πόσοι ήρθαν μόνο για παρέα (δεν πήραν τίποτα).**
- Απάντηση: $100 - |K \cup \Pi \cup M|$
- Δεδομένα:
 - $|K \cap \Pi \cap M| = 30$
 - $|K \cap \Pi| + |K \cap M| + |\Pi \cap M| - 2|K \cap \Pi \cap M| = 75$
 - $|K \cap \Pi| + |K \cap M| + |\Pi \cap M| - |K \cap \Pi \cap M| = 105$
 - Συνολική είσπραξη 200 ευρώ, άρα $|K| + |\Pi| + |M| = 200$.
- $|K \cup \Pi \cup M| = 200 - 105 = 95$.
- Απάντηση: $100 - |K \cup \Pi \cup M| = 5$.

Παράδειγμα

- Πόσοι αριθμοί στο $\{1, 2, \dots, 48\}$ είναι πρώτοι;
- Απάντηση: $47 - (\# \text{ σύνθετων αριθμών} \leq 48)$
 - Αριθμός n σύνθετος: έχει πρώτο παράγοντα $\leq \sqrt{n}$
 - Αριθμός $n \in \{2, 3, \dots, 48\}$ σύνθετος:
 - Είναι διαφορετικός από 2, 3, 5, και διαιρείται από 2, 3, ή 5.
- Πόσοι αριθμοί στο $\{2, 3, \dots, 48\}$ διαιρούνται από 2, 3, ή 5.
 - $|A_2| = 24, |A_3| = 16, |A_5| = 9, |A_2 \cap A_3| = 8, |A_2 \cap A_5| = 4,$
 $|A_3 \cap A_5| = 3, |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 1.$
 - $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 24 + 16 + 9 - 8 - 4 - 3 + 1 = 35.$
 - Προσοχή: έχουμε συμπεριλάβει 2, 3, και 5.
- Άρα $(\# \text{ σύνθετων αριθμών} \leq 48) = 35 - 3 = 32.$
- $(\# \text{ πρώτων αριθμών} \leq 48) = 47 - 32 = \mathbf{15}.$

Κόσκινο του Ερατοσθένη

- Υπολογισμός πρώτων αριθμών $\leq M$.
 - Αρχικά όλοι οι φυσικοί στο $\{2, \dots, M\}$.
 - Σε κάθε γύρο, θεωρούμε επόμενο διαθέσιμο αριθμό (είναι πρώτος) και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του που ξεπερνούν τον αριθμό και δεν έχουν διαγραφεί ήδη.
 - 1^{ος} γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 2.
 - 2^{ος} γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 3 (όχι του 2)
 - 3^{ος} γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 5 (όχι των 2, 3), κοκ.
 - Τερματισμός όταν επόμενος διαθέσιμος αριθμός $> \sqrt{M}$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48		