Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

5η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων, Σχέδιο Λύσεων

Θέμα 1. Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε n (διακεκριμένους) φοιτητές σε 6 (διακεκριμένα) αμφιθέατρα ώστε κανένα αμφιθέατρο να μην μείνει κενό, το πρώτο και το τρίτο αμφιθέατρο να έχουν περιττό αριθμό φοιτητών, και το δεύτερο και το τέταρτο αμφιθέατρο να έχουν άρτιο αριθμό φοιτητών.

Λύση. Πρόκειται για πρόβλημα διανομής n διακεκριμένων αντικειμένων (φοιτητών) σε 6 διακεκριμένες υποδοχές (αμφιθέατρα), ώστε καμία υποδοχή να μην μείνει κενή, και χωρίς να έχει σημασία η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές. Πρόκειται για πρόβλημα διατάξεων, άρα θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Σύμφωνα και με το (α.1), ο εκθετικός απαριθμητής για το πέμπτο και το έκτο αμφιθέατρο, που πρέπει απλώς να μην μείνουν κενά είναι $e^x - 1$. Ο εκθετικός απαριθμητής για το πρώτο και το τρίτο αμφιθέατρο που πρέπει να έχουν περιττό αριθμό φοιτητών και να μην μείνουν κενά είναι:

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ο εκθετικός απαριθμητής για το δεύτερο και το τέταρτο αμφιθέατρο που πρέπει να έχουν άρτιο αριθμό φοιτητών και να μην μείνουν κενά είναι:

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$$

Άρα η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$(e^x - 1)^2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \right)^2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $x^n/n!$.

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή του $x^n/n!$, αναπτύσσουμε την γεννήτρια συνάρτηση σε δυνάμεις του e^x ως εξής:

$$\frac{1}{16}\left(e^{6x} - 6e^{5x} + 13e^{4x} - 8e^{3x} - 14e^{2x} + 28e^{x} - 14 - 8e^{-x} + 13e^{-2x} - 6e^{-3x} + e^{-4x}\right)$$

Ο συντελεστής του $x^n/n!$ στην παραπάνω έκφραση είναι:

$$\frac{1}{16}\left(6^n - 6 \cdot 5^n + 13 \cdot 4^n - 8 \cdot 3^n - 14 \cdot 2^n + 28 - 8(-1)^n + 13(-2)^n - 6(-3)^n + (-4)^n\right)$$

Θέμα 2. Έχουμε n ίδιες πράσινες μπάλες και k αριθμημένες (διακεκριμένες) κόκκινες μπάλες που διανέμονται σε m διακεκριμένες υποδοχές. Θεωρούμε ότι $m \leq \min\{k, n\}$, και ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία τοποθετούνται οι μπάλες στις υποδοχές. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων για:

1. την διανομή των πράσινων και των κόκκινων μπαλών στις υποδοχές ώστε καμία υποδοχή να μην μείνει κενή και κάθε υποδοχή να έχει ίδιο αριθμό από πράσινες και κόκκινες μπάλες (μόνο για αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι $k = n$).
2. την διανομή των πράσινων και των κόκκινων μπαλών στις υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή να έχει τουλάχιστον μία πράσινη και τουλάχιστον μία κόκκινη μπάλα.

Λύση. (1) Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των κόκκινων μπαλών σε κάθε υποδοχή καθορίζει με μοναδικό τρόπο τη διανομή των πράσινων μπαλών. Αφού μόνο το πλήθος των κόκκινων μπαλών σε κάθε υποδοχή έχει σημασία, ο αριθμός των διανομών όλων των μπαλών ταυτίζεται με τον αριθμό των διανομών των k διακεκριμένων κόκκινων μπαλών στις m διακεκριμένες υποδοχές, πρόβλημα για το οποίο διατυπώνουμε τη γεννήτρια συνάρτηση. Πρόκειται για πρόβλημα διατάξεων, άρα χρησιμοποιούμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Αφού δεν παίζει ρόλο η σειρά των μπαλών στις υποδοχές και κάθε υποδοχή δέχεται τουλάχιστον 1 κόκκινη μπάλα, ο εκθετικός απαριθμητής για τον αριθμό των κόκκινων μπαλών σε κάθε υποδοχή είναι:

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x - 1$$

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση δίνεται από το γινόμενο των παραπάνω εκθετικών απαριθμητών για όλες τις υποδοχές, και είναι $(e^x - 1)^m$, και ο αριθμός των διαφορετικών διανομών δίνεται από τον συντελεστή του $x^k/k!$.

Ως άσκηση, να διατυπώσετε την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση για την περίπτωση που η σειρά διανομής των μπαλών στις υποδοχές έχει σημασία.

(2) Όπως είδαμε στο (1), η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τη διανομή των κόκκινων μπαλών είναι $(e^x - 1)^m$ και ο αριθμός των διαφορετικών διανομών δίνεται από τον συντελεστή του $x^k/k!$.

Η διανομή των πράσινων μπαλών είναι ανεξάρτητη από τη διανομή των κόκκινων μπαλών (επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, ο συνολικός αριθμός των διανομών θα δίνεται από το γινόμενο του αριθμού των διανομών για τις κόκκινες μπάλες επί τον αριθμό των διανομών για τις πράσινες μπάλες). Για να είναι οι επιμέρους γεννήτριες συναρτήσεις ανεξάρτητες, κωδικοποιούμε την γεννήτρια συνάρτηση για τις πράσινες μπάλες με χρήση διαφορετικής μεταβλητής z. Γνωρίζουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση για τη διανομή n ίδιων αντικειμένων σε m διακεκριμένες υποδοχές ώστε καμία υποδοχή να μην μείνει κενή είναι

$$(z + z^2 + z^3 + \cdots)^m = \left(\frac{z}{1-z}\right)^m ,$$

και ότι ο αριθμός των διαφορετικών διανομών δίνεται από τον συντελεστή του z^n.

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση για τη διανομή όλων των μπαλών είναι

$$\left(\frac{z(e^x - 1)}{1-z}\right)^m ,$$

και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $z^n x^k/k!$. □

Θέμα 3. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετηθούν 200 διαφορετικά βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια, όταν:

1. κάθε ράφι πρέπει να έχει τουλάχιστον 10 και το πολύ 100 βιβλία, και δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα βιβλία σε κάθε ράφι.

2. κάθε ράφι πρέπει να έχει περισσότερα βιβλία από το επόμενό του, το πρώτο ράφι δεν πρέπει να μείνει κενό, και έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα βιβλία στα ράφια.

Λύση. Και στις δύο περιπτώσεις, έχουμε διανομή διακεκριμένων αντικειμένων (βιβλία) σε διακεκριμένες υποδοχές (ράφια), δηλ. πρόβλημα διατάξεων. Έτσι χρησιμοποιούμε εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις.

(1) Αφού δεν έχει σημασία η σειρά των βιβλίων στα ράφια, και κάθε ράφι πρέπει να έχει τουλάχιστον 10 και το πολύ 100 βιβλία, ο εκθετικός απαριθμητής για τον αριθμό των βιβλίων σε κάθε ράφι είναι:

$$\frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{12}}{12!} + \cdots + \frac{x^{100}}{100!}$$

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση δίνεται από το γινόμενο των παραπάνω εκθετικών απαριθμητών για όλα τα ράφια, και είναι:

$$\left(\frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{12}}{12!} + \cdots + \frac{x^{100}}{100!}\right)^4$$

Το πλήθος των διαφορετικών διανομών δίνεται από τον συντελεστή του $x^{200}/200!$.

(2) Έστω z_1, z_2, z_3, z_4 το πλήθος των βιβλίων στο αντίστοιχο ράφι. Αν θεωρήσουμε ότι τα βιβλία δεν είναι διακεκριμένα, το πλήθος των διανομών τους σε 4 ράφια με τον περιορισμό της εκφώνησης είναι ίσο με το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 200$, όπου $z_1 > z_2 > z_3 > z_4 \geq 0$. Για να κωδικοποιήσουμε τον περιορισμό $z_1 > z_2 > z_3 > z_4$, θέτουμε $z_3 = z_4 + \lambda$, $z_2 = z_3 + \mu = z_4 + \lambda + \mu$, και $z_1 = z_2 + \kappa = z_4 + \lambda + \mu + \kappa$, για κάποια $\lambda, \mu, \kappa \geq 1$. Έτσι καταλήγουμε ότι (αν τα βιβλία δεν είναι διακεκριμένα,) το πλήθος των διανομών τους σε 4 ράφια με τον περιορισμό της εκφώνησης είναι ίσο με το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $3\lambda + 2\mu + \kappa + 4z_4 = 200$, όπου $z_4 \geq 0$ και $\lambda, \mu, \kappa \geq 1$.

Σχηματίζουμε λοιπόν τους αντίστοιχους απαριθμητές. Επειδή τα βιβλία είναι διακεκριμένα και παίζει ρόλο η σειρά με την οποία τοποθετούνται στα ράφια, θα χρησιμοποιήσουμε εκθετικούς απαριθμητές (όπου πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο με το αντίστοιχο πλήθος μεταθέσεων, επειδή η σειρά των βιβλίων έχει σημασία). Έτσι ο απαριθμητής για το λ είναι $3!\frac{x^3}{3!} + 6!\frac{x^6}{6!} + 9!\frac{x^9}{9!} + 12!\frac{x^{12}}{12!} + \ldots$, ο απαριθμητής για το μ είναι $2!\frac{x^2}{2!} + 4!\frac{x^4}{4!} + 6!\frac{x^6}{6!} + 8!\frac{x^8}{8!} + \ldots$, ο απαριθμητής για το κ είναι $1!\frac{x}{1!} + 2!\frac{x^2}{2!} + 3!\frac{x^3}{3!} + 4!\frac{x^4}{4!} + \ldots$, και ο απαριθμητής για το z_4 είναι $1 + 4!\frac{x^4}{4!} + 8!\frac{x^8}{8!} + 12!\frac{x^{12}}{12!} + 16!\frac{x^{16}}{16!} + \ldots$. Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει από το γινόμενο των αντίστοιχων απαριθμητών, και είναι:

$$(x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots)(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots)(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \ldots)$$

Το πλήθος των διαφορετικών διανομών δίνεται από τον συντελεστή του $x^{200}/200!$. □

Θέμα 4. Προμηθεύεστε αναψυκτικά για το πάρτυ σας, και έχετε να διαλέξετε ανάμεσα σε 6 είδη. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να αγοράσετε 32 συσκευασίες αναψυκτικών, αν θέλετε να αγοράσετε τουλάχιστον 1 και το πολύ 8 συσκευασίες από κάθε είδος; Να υπολογίσετε το ζητούμενο (i) με συνδυαστικά επιχειρήματα, και (ii) με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων.

Λύση. Με 1 τρόπο, δεσμεύουμε από μία συσκευασία για κάθε είδος (6 συσκευασίες συνολικά). Οι διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε τις υπόλοιπες συσκευασίες είναι όσες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 26\,, \quad 7 \geq x_i \geq 0\,,$$

ή ισοδύναμα με τις διανομές 26 μη διακεκριμένων αντικειμένων σε 6 διακεκριμένες υποδοχές, ώστε καμία υποδοχή να μην πάρει περισσότερα από 7 αντικείμενα. Για τον υπολογισμό με συνδυαστικά επιχειρήματα, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του εγκλεισμού αποκλεισμού:

– Όλες οι διανομές είναι $C(6+26-1,26) = C(31,5) = 169.911$.
– Για να υπολογίσουμε τις διανομές όπου μια συγκεκριμένη υποδοχή έχει περισσότερα από 7 αντικείμενα, δεσμεύουμε 8 αντικείμενα στη συγκεκριμένη υποδοχή, και διανέμουμε ελεύθερα τα υπόλοιπα 18 αντικείμενα. Άρα έχουμε $C(6+18-1,18) = C(23,5) = 33.649$ διανομές όπου μια συγκεκριμένη υποδοχή έχει περισσότερα από 7 αντικείμενα. Υπάρχουν 6 διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε αυτή την υποδοχή.
– Για να υπολογίσουμε τις διανομές όπου δύο συγκεκριμένες υποδοχές έχουν περισσότερα από 7 αντικείμενα, δεσμεύουμε από 8 αντικείμενα στις συγκεκριμένες υποδοχές, και διανέμουμε ελεύθερα τα υπόλοιπα 10 αντικείμενα. Άρα έχουμε $C(6+10-1,10) = C(15,5) = 3003$ διανομές όπου δύο συγκεκριμένες υποδοχές έχουν περισσότερα από 7 αντικείμενα. Υπάρχουν $C(6,2) = 15$ διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε αυτές τις υποδοχές.
– Για να υπολογίσουμε τις διανομές όπου τρεις συγκεκριμένες υποδοχές έχουν περισσότερα από 7 αντικείμενα, δεσμεύουμε από 8 αντικείμενα στις συγκεκριμένες υποδοχές, και διανέμουμε ελεύθερα τα υπόλοιπα 2 αντικείμενα. Άρα έχουμε $C(6+2-1,2) = C(7,5) = 21$ διανομές όπου τρεις συγκεκριμένες υποδοχές έχουν περισσότερα από 7 αντικείμενα. Υπάρχουν $C(6,3) = 20$ διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε αυτές τις υποδοχές.
– Δεν υπάρχει καμία διανομή όπου τέσσερις ή περισσότερες υποδοχές έχουν περισσότερα από 7 αντικείμενα.

Άρα οι διαφορετικοί τρόποι συνολικά είναι:

$$\binom{31}{5} - \binom{6}{1}\binom{23}{5} + \binom{6}{2}\binom{15}{5} - \binom{6}{3}\binom{7}{5} = 12.642 \tag{1}$$

Αντίστοιχα, το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{26} στη γεννήτρια συνάρτηση:

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)^6 &= \left(\frac{1-x^8}{1-x}\right)^6 \\ &= \frac{1-6x^8+15x^{16}-20x^{24}+15x^{32}-6x^{40}+x^{48}}{(1-x)^6} \end{aligned} \tag{2}$$

Για να υπολογίσουμε το συντελεστή του x^{26} στην (2), εφαρμόζουμε τη γραμμική ιδιότητα. Από το γενικευμένο δυωνυμικό ανάπτυγμα, ο συντελεστής του x^k στο ανάπτυγμα της $\frac{1}{(1-x)^n}$ είναι $C(n+k-1, n-1)$. Άρα ο συντελεστής του x^{26} σε καθέναν από τους όρους της (2) είναι:

– Ο συντελεστής του x^{26} στο ανάπτυγμα της $\frac{1}{(1-x)^6}$ είναι $C(6+26-1,5) = C(31,5)$.
– Ο συντελεστής του x^{26} στο ανάπτυγμα της $\frac{x^8}{(1-x)^6}$ είναι ίσος με τον συντελεστή του x^{18} στο ανάπτυγμα της $\frac{1}{(1-x)^6}$, δηλ. ίσος με $C(6+18-1,5) = C(23,5)$.
– Ο συντελεστής του x^{26} στο ανάπτυγμα της $\frac{x^{16}}{(1-x)^6}$ είναι ίσος με τον συντελεστή του x^{10} στο ανάπτυγμα της $\frac{1}{(1-x)^6}$, δηλ. ίσος με $C(6+10-1,5) = C(15,5)$.
– Ο συντελεστής του x^{26} στο ανάπτυγμα της $\frac{x^{24}}{(1-x)^6}$ είναι ίσος με τον συντελεστή του x^2 στο ανάπτυγμα της $\frac{1}{(1-x)^6}$, δηλ. ίσος με $C(6+2-1,5) = C(7,5)$.
– Στο ανάπτυγμα των $\frac{x^{32}}{(1-x)^6}$, $\frac{x^{40}}{(1-x)^6}$, και $\frac{x^{48}}{(1-x)^6}$ δεν εμφανίζεται το x^{26}. Άρα ο αντίστοιχος συντελεστής είναι 0.

Με βάση τα παραπάνω, και εφαρμόζοντας τη γραμμική ιδιότητα, ο συντελεστής του x^{26} στο ανάπτυγμα της (2) δίνεται από την (1). □

Θέμα 5. Να υπολογίσετε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας της οποίας ο n-οστός όρος δίνει τον αριθμό των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους n που δεν περιέχουν την υποσυμβολοσειρά 111.

Λύση. Έστω α_n το πλήθος των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους n που δεν περιέχουν την υποσυμβολοσειρά 111. Παρατηρούμε ότι $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 7$, $\alpha_4 = 13, \ldots$. Μια δυαδική συμβολοσειρά μήκους n που δεν περιέχει το 111 μπορεί να τελειώνει σε 0, σε 01, ή σε 011. Ανάλογα με την κατάληξή της, μια τέτοια συμβολοσειρά προκύπτει:

- Αν τελειώνει σε 0, με την προσθήκη του ψηφίου 0 στο τέλος μιας δυαδικής συμβολοσειράς μήκους $n-1$ που δεν περιέχει το 111 (έτσι σχηματίζονται α_{n-1} συμβολοσειρές).
- Αν τελειώνει σε 01, με την προσθήκη των ψηφίων 01 στο τέλος μιας δυαδικής συμβολοσειράς μήκους $n-2$ που δεν περιέχει το 111 (έτσι σχηματίζονται α_{n-2} συμβολοσειρές).
- Αν τελειώνει σε 011, με την προσθήκη των ψηφίων 011 στο τέλος μιας δυαδικής συμβολοσειράς μήκους $n-3$ που δεν περιέχει το 111 (έτσι σχηματίζονται α_{n-3} συμβολοσειρές).

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω περιπτώσεις είναι αμοιβαία αποκλειόμενες και επιτρέπουν την δημιουργία όλων των συμβολοσειρών μήκους n που δεν περιέχουν το 111. Άρα το πλήθος αυτών των συμβολοσειρών περιγράφεται από την αναδρομική σχέση $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3}$, για $n \geq 3$, με αρχικές συνθήκες $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$.

Έστω $A(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση της παραπάνω ακολουθίας. Εργαζόμενοι όπως κατά την επίλυση γραμμικών αναδρομικών σχέσεων με την μέθοδο των γεννητρικών συναρτήσεων έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n x^n - \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_{n-1} x^n - \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_{n-2} x^n - \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_{n-3} x^n = 0 \Rightarrow \\
[A(x) - 4x^2 - 2x - 1] - x\,[A(x) - 2x - 1] - x^2\,[A(x) - 1] - x^3 A(x) = 0 \Rightarrow \\
A(x)(1 - x - x^2 - x^3) = x^2 + x + 1 \Rightarrow \\
A(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 - x - x^2 - x^3}
\end{aligned}$$