Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

1η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων, Σχέδιο Λύσεων

Άσκηση 1 (Σύνολα και Διαγωνιοποίηση). (α) Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(A)$ το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή. Αν μια πρόταση είναι αληθής, να διατυπώσετε μια σύντομη απόδειξη, διαφορετικά ένα αντιπαράδειγμα.

1. $A \cup \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A)$
2. $A \cap \mathcal{P}(A) = A$
3. $\{A\} \cup \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A)$
4. $\{A\} \cap \mathcal{P}(A) = A$
5. $A - \mathcal{P}(A) = A$
6. $\mathcal{P}(A) - \{A\} = \mathcal{P}(A)$

(β) Έστω $\mathcal{S}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Είναι το $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ) Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο $\{0, 1, 2, 3\}$. Είναι το $\mathcal{F}$ αριθμήσιμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση. (α) Τα (1), (2), (4), (5), και (6) είναι ψευδή (με την έννοια ότι υπάρχουν σύνολα A για τα οποία δεν αληθεύουν), και μόνο το (3) αληθεύει για κάθε σύνολο A.

Για το (1), το $A \cup \mathcal{P}(A)$ είναι ένα σύνολο με στοιχεία όλα τα στοιχεία του A και όλα τα υποσύνολα του A, το οποίο εν γένει είναι διαφορετικό του $\mathcal{P}(A)$. Για το (2), δεν ισχύει ότι $A \subseteq \mathcal{P}(A)$. Για (4), ισχύει ότι $\{A\} \cap \mathcal{P}(A) = \{A\}$, δηλαδή το σύνολο A αποτελεί το (μοναδικό) κοινό στοιχείο των συνόλων $\{A\}$ και $\mathcal{P}(A)$. Για το (6), το $\mathcal{P}(A) - \{A\}$ δεν περιέχει ως στοιχείο το σύνολο A, και άρα είναι το σύνολο των *γνήσιων* υποσυνόλων του A. Ένα απλό αντιπαράδειγμα αποτελεί το μονοσύνολο $\{a\}$. Συγκεκριμένα:

1. $\{a\} \cup \{\emptyset, \{a\}\} = \{a, \emptyset, \{a\}\} \neq \{\emptyset, \{a\}\}$.
2. $\{a\} \cap \{\emptyset, \{a\}\} = \emptyset \neq \{a\}$.
4. $\{\{a\}\} \cap \{\emptyset, \{a\}\} = \{\{a\}\} \neq \{a\}$
6. $\{\emptyset, \{a\}\} - \{\{a\}\} = \{\emptyset\} \neq \{\emptyset, \{a\}\}$

Για το (5), μπορεί να συμβαίνει κάποιο υποσύνολο του A να είναι ταυτόχρονα και στοιχείο του, οπότε $A - \mathcal{P}(A) \neq A$. Ένα απλό αντιπαράδειγμα αποτελεί το σύνολο $\{a, \{a\}\}$, για το οποίο $\mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$, και

$$\{a, \{a\}\} - \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\} = \{a\} \neq \{a, \{a\}\}$$

Για το (3), πράγματι ισχύει ότι $\{A\} \cup \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A)$, αφού $\{A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

(β) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το σύνολο των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με k στοιχεία

$$S_k = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = k\}$$

Το S_k είναι αριθμήσιμο για κάθε συγκεκριμένη τιμή του k. Αυτό αποδεικνύεται π.χ. όπως αποδείξαμε ότι το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο, δηλαδή απαριθμώντας όλα τα σύνολα του S_k με άθροισμα στοιχείων

$\ell = 0, 1, 2, \ldots$, ή απαριθμώντας όλα τα σύνολα του S_k που αποτελούν υποσύνολα του $\{0, 1, \ldots, n\}$, για $n = k-1, k, k+1, \ldots$. Εξ' ορισμού, $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$. Συνεπώς το S είναι αριθμήσιμο αφού μπορεί να εκφραστεί ως ένωση μιας αριθμήσιμα άπειρης συλλογής αριθμήσιμων συνόλων.

(γ) Το $\mathcal{F}$ δεν είναι αριθμήσιμο (διαίσθηση: κάθε συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $\{0,1\}$ αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί π.χ. με διαγωνιοποίηση. Έστω ότι το $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμο, και έστω $f_0, f_1, f_2, \ldots$ μια αυθαίρετη απαρίθμηση των συναρτήσεων του $\mathcal{F}$. Θεωρούμε την (“διαγώνια” συνάρτηση) $d : \mathbb{N} \mapsto \{0,1,2,3\}$ που για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έχει τιμή $d(k) = 3 - f_k(k)$. Εκ κατασκευής, για κάθε φυσικό k, $d(k) \neq f_k(k)$. Συνεπώς η d διαφέρει από κάθε συνάρτηση f_k (η διαφορά τους έγκειται στην τιμή τους στο σημείο k). Άρα η d δεν περιλαμβάνεται στην παραπάνω απαρίθμηση, άτοπο. Επομένως το $\mathcal{F}$ δεν είναι αριθμήσιμο. □

Άσκηση 2 (Προτασιακή Λογική). (α) Σε ένα απομονωμένο νησί υπάρχουν μόνο δύο κοινωνικές τάξεις: οι ευγενείς, που λένε πάντα την αλήθεια, και οι ψευτοευγενείς, που λένε πάντα ψέματα. Δύο κάτοικοι του νησιού, ο X και ο Y δηλώνουν: ο X ότι “ο Y είναι ευγενής”, και ο Y ότι “δεν ανήκω στην ίδια τάξη με τον X”. Είναι κάποιος από τους X και Y ευγενής, και αν ναι, ποιος;

(β) Ένας εξερευνητής συλλαμβάνεται από μια φυλή κανιβάλων. Στη φυλή υπάρχουν δύο κατηγορίες κανιβάλων, αυτοί που λένε πάντα την αλήθεια και αυτοί που λένε πάντα ψέματα. Ο εξερευνητής θα μείνει ελεύθερος μόνο αν διαπιστώσει σε ποιά κατηγορία ανήκει ο φύλαρχος. Ο εξερευνητής μπορεί να κάνει μία μόνο ερώτηση στον φύλαρχο, την οποία αυτός θα απαντήσει με ένα “ναι” ή ένα “όχι”. (i) Να εξηγήσετε γιατί η ερώτηση “Είσαι ειλικρινής;” δεν εξυπηρετεί τον σκοπό του εξερευνητή. (ii) Να βρείτε ερώτηση με την οποία ο εξερευνητής διαπιστώνει αν ο φύλαρχος είναι ειλικρινής.

(γ) Μια συγκεκριμένη χώρα κατοικείται μόνο από ανθρώπους που είτε λένε πάντα αλήθεια είτε λένε πάντα ψέματα, και απαντούν σε ερωτήσεις μόνο με ένα “ναι” ή ένα “όχι”. Ένας τουρίστας φθάνει σε μια διακλάδωση του δρόμου, όπου το ένα παρακλάδι οδηγεί στην πρωτεύουσα και το άλλο όχι. Δεν υπάρχει πινακίδα που να υποδεικνύει ποιο παρακλάδι να ακολουθήσει, αλλά υπάρχει ένας κάτοικος, ο κύριος Ζ, ο οποίος στέκεται στη διακλάδωση. Ποια ερώτηση πρέπει να κάνει ο τουρίστας στον κύριο Ζ για να αποφασίσει ποιο παρακλάδι πρέπει να ακολουθήσει;

Λύση. (α) Έστω p προτασιακή μεταβλητή που δηλώνει ότι “ο X είναι ευγενής” (και άρα λέει την αλήθεια), και q προτασιακή μεταβλητή που δηλώνει ότι “ο Y είναι ευγενής” (και άρα λέει την αλήθεια). Με βάση αυτή την κωδικοποίηση, ο X δηλώνει q, και ο Y δηλώνει $q \leftrightarrow \neg p$. Η δήλωση του X αληθεύει ανν ο X είναι ευγενής, άρα πρέπει να αληθεύει ότι $p \leftrightarrow q$. Ομοίως, η δήλωση του Y αληθεύει ανν ο Y είναι ευγενής, άρα πρέπει να αληθεύει ότι $q \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$. Τελικά πρέπει να αληθεύει ο προτασιακός τύπος $\varphi \equiv (p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg p))$. Παρατηρούμε ότι ο φ αληθεύει ανν αμφότερες οι προτασιακές μεταβλητές p και q είναι Ψ. Άρα κανένας από τους X και Y δεν είναι ευγενής.

Εναλλακτικά, μπορούμε να διακρίνουμε περιπτώσεις σε σχέση με το αν ο X είναι ευγενής ή όχι. Αν ο X είναι ευγενής, τότε λέει την αλήθεια, άρα και ο Y είναι ευγενής. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την δήλωση του Y, που οφείλει να είναι αληθής (αφού ο Y είναι ευγενής). Αν ο X δεν είναι ευγενής, τότε λέει ψέματα, άρα ούτε ο Y είναι ευγενής. Άρα η δήλωση του Y είναι ψευδής, το οποίο είναι συμβατό με την υπόθεση ότι κανένας από τους X και Y δεν είναι ευγενής.

(β) Στην ερώτηση “Είσαι ειλικρινής;”, ο φύλαρχος απαντά πάντα “ναι” (αν πράγματι είναι ειλικρινής, γιατί λέει την αλήθεια, αν όχι, γιατί λέει ψέματα). Αντίθετα, αν η ερώτηση του εξερευνητή αφορά κάτι που είναι ταυτολογικά αληθές (π.χ. “Είναι αλήθεια ότι είσαι ο φύλαρχος;”, “Είναι αλήθεια ότι με έχετε συλλάβει;”, κοκ.), τότε ο φύλαρχος απαντά “ναι” ανν είναι ειλικρινής.

(γ) Έστω p προτασιακή μεταβλητή που δηλώνει ότι "ο κύριος Z λέει την αλήθεια" και q προτασιακή μεταβλητή που δηλώνει ότι "το αριστερό παρακλάδι οδηγεί στην πρωτεύουσα". Θα σχηματίσουμε προτασιακό τύπο φ με τις p και q, ώστε η απάντηση του κυρίου Z στην ερώτηση "Είναι ο φ αληθής;" να είναι "ναι" ανν η q είναι αληθής.

Ειδικότερα, αν η p είναι Α, ο προτασιακός τύπος φ πρέπει να έχει την ίδια τιμή αλήθειας με την q (ώστε η απάντηση του Z, που λέει αλήθεια, να ταυτίζεται με την αληθοτιμή της q), ενώ αν η p είναι Ψ, ο φ πρέπει να έχει την ίδια τιμή αλήθειας με την $\neg q$ (ώστε η απάντηση του Z, που λέει ψέματα, να ταυτίζεται με την αληθοτιμή της q). Έτσι καταλήγουμε στον πίνακα αλήθειας του προτασιακού τύπου φ, και ότι $\varphi \equiv p \leftrightarrow q$. □

p	q	φ
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Άσκηση 3 (Κατηγορηματική Λογική). Έστω $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$, και έστω $\mathcal{P}(S_n)$ το δυναμοσύνολο του S_n. Για κάθε φυσικό m, $0 \le m \le n$, συμβολίζουμε με E_m το υποσύνολο του $\mathcal{P}(S_n)$ που αποτελείται από τα υποσύνολα του S_n με πληθικό αριθμό m. Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα με διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q, την οποία ερμηνεύουμε στο $\mathcal{P}(S_n)$ με το $Q(x, y)$ να αληθεύει ανν $x \subseteq y$ (δεν υπάρχει στη γλώσσα μας άλλο κατηγορηματικό σύμβολο, συναρτησιακό σύμβολο, ή σύμβολο σταθεράς). Σε αυτή την ερμηνεία, να διατυπώσετε:

1. Τύπο $\varphi_1(x)$ που αληθεύει ανν $x \notin E_0$.
2. Τύπο $\varphi_2(x)$ που αληθεύει ανν $x \in E_{n-1}$.
3. Τύπο $\varphi_3(x)$ που αληθεύει ανν το x έχει τουλάχιστον 2 γνήσια υποσύνολα στο $\mathcal{P}(S_n)$.
4. Τύπο $\varphi_4(x)$ που αληθεύει ανν το x έχει (ακριβώς) 2 υποσύνολα στο $\mathcal{P}(S_n)$.
5. Τύπο $\varphi_5(x, y)$ που αληθεύει ανν τα x και y αποτελούν μια διαμέριση του S_n.
6. Τύπο $\varphi_6(x, y, z)$ που αληθεύει ανν το σύνολο x αποτελεί την ένωση των συνόλων y και z.
7. Πρόταση που δηλώνει την ύπαρξη μοναδικού συνόλου που είναι υπερσύνολο όλων των συνόλων στο $\mathcal{P}(S_n)$.

Λύση. (1) Το E_0 περιλαμβάνει μόνο το κενό σύνολο. Άρα ο $\varphi_1(x)$ πρέπει να αληθεύει ανν $x \neq \emptyset$, δηλ. ανν το x έχει υποσύνολο διαφορετικό από τον εαυτό του. Συνεπώς:

$$\varphi_1(x) \equiv \exists y(x \neq y \land Q(y, x))$$

(2) Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του E_{n-1} χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι έχουν ένα και μοναδικό γνήσιο υπερσύνολο, το S_n. Άρα:

$$\varphi_2(x) \equiv \exists y[x \neq y \land Q(x, y) \land \forall z(Q(x, z) \to (x = z \lor y = z))]$$

(3) $\varphi_3(x) \equiv \exists y \exists z[y \neq z \land x \neq y \land x \neq z \land Q(y, x) \land Q(z, x)]$
(4) $\varphi_4(x) \equiv \exists y \exists z[y \neq z \land Q(y, x) \land Q(z, x) \land \forall w(Q(w, x) \to (w = y \lor w = z))]$
(5) Ένας τρόπος να εκφράσουμε ότι τα x και y αποτελούν διαμέριση του S_n είναι να δηλώσουμε ότι αμφότερα είναι διαφορετικά από το κενό σύνολο και ότι κάθε μονοσύνολο $z \in E_1$, είναι υποσύνολο είτε του x είτε του y, αλλά όχι και των δύο. Για να εξασφαλίσουμε ότι τα x και y είναι διαφορετικά από το κενό σύνολο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο φ_1. Για να εκφράσουμε την δεύτερη συνθήκη, διατυπώνουμε πρώτα τύπο $\psi(z)$ που αληθεύει ανν $z \in E_1$:

$$\psi(z) \equiv \exists w[w \neq z \land Q(w, z) \land \forall v(Q(v, z) \to (v = z \lor v = w))]$$

Με βάση το παραπάνω σκεπτικό, έχουμε:

$$\varphi_5(x, y) \equiv \varphi_1(x) \land \varphi_1(y) \land \forall z[\psi(z) \to (Q(z, x) \leftrightarrow \neg Q(z, y))]$$

(6) $\varphi_6(x, y, z) \equiv Q(y, x) \land Q(z, x) \land \forall w(Q(y, w) \land Q(z, w) \to Q(x, w))$
(7) $\exists x[\forall y Q(y, x) \land \forall z(\forall y Q(y, z) \to x = z)]$ □