# Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

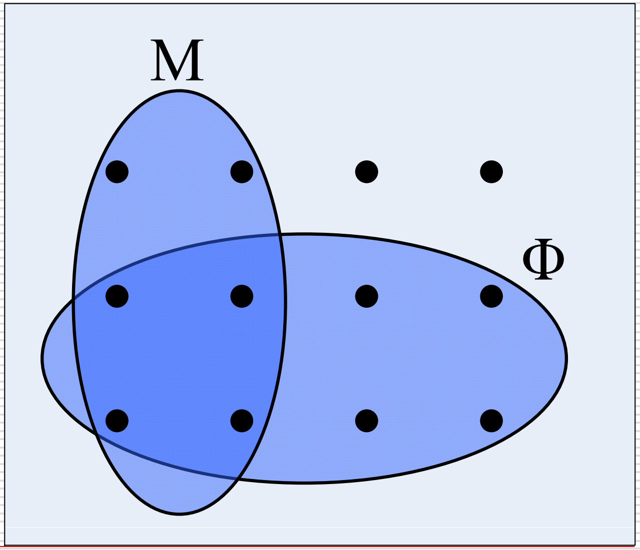
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

# Πληθικός Αριθμός Ένωσης

- Πληθικός αριθμός (πεπερασμένων) συνόλων που προκύπτουν από πράξεις (ένωση, τομή) συνόλων:
  - Π.χ. $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A - B|$, $|\overline{A}|$ σε σχέση με $|A|$, $|B|$.
  - $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$, $|A - B| \geq |A| - |B|$, $|\overline{A}| = |U| - |A|$. Πότε ισχύουν ισότητες;
- Σύνολο 12 βιβλίων: 6 βιβλία μαθηματικά, 8 βιβλία φυσική, και 4 μαθηματικά και φυσική.
  - Πόσα μαθηματικά ή φυσική; Πόσα ούτε μαθηματικά ούτε φυσική;

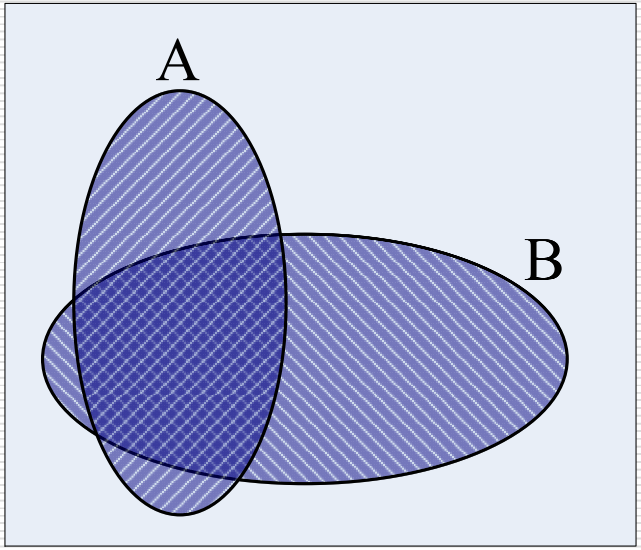
$$|\mathbf{M} \cup \mathbf{\Phi}| = |\mathbf{M}| + |\mathbf{\Phi}| - |\mathbf{M} \cap \mathbf{\Phi}| = 6 + 8 - 4 = 10$$

$$|\overline{\mathbf{M} \cup \mathbf{\Phi}}| = |U| - |\mathbf{M} \cup \mathbf{\Phi}| = 12 - 10 = 2$$



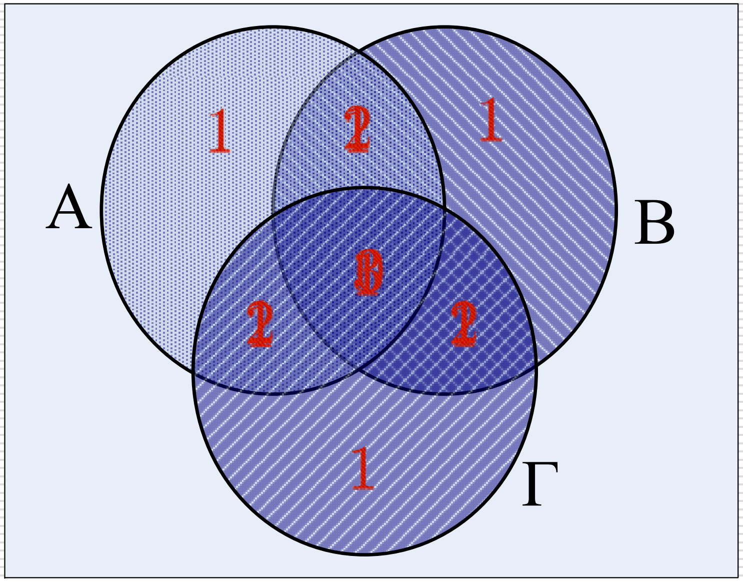
# Εγκλεισμός – Αποκλεισμός

- Πληθικός αριθμός ένωσης πεπερασμένων συνόλων.
- Δύο σύνολα A, B: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - Στο $|A| + |B|$ μετράμε διπλά τα στοιχεία στο $|A \cap B|$. Ο όρος $-|A \cap B|$ διορθώνει το λάθος.



# Εγκλεισμός – Αποκλεισμός

- Τρία σύνολα Α, Β, Γ: $|A \cup B \cup \Gamma|$
  - $|A| + |B| + |\Gamma|$
  - $|A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |B \cap \Gamma|$
  - $|A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |B \cap \Gamma| + |A \cap B \cap \Gamma|$



# Παράδειγμα

- 200 φοιτητές, 140 Πληροφορική, 50 Διακριτά, 24 αμφότερα.
  - Πόσοι φοιτητές Πληροφορική ή Διακριτά;
  - $|\Pi \cup \Delta| = |\Pi| + |\Delta| - |\Pi \cap \Delta| = 140 + 50 - 24 = 166$.
  - Πόσοι φοιτητές ούτε Πληροφορική ούτε Διακριτά;
  - $|\overline{\Pi} \cap \overline{\Delta}| = |\overline{\Pi \cup \Delta}| = |\Phi| - |\Pi \cup \Delta| = 200 - 166 = 34$
- Από αυτούς τους 200 φοιτητές, 60 πήγαν στο ΣΦΗΜΜΥ. Από αυτούς 20 Διακριτά, 45 Πληροφορική, και 16 αμφότερα.
  - Πόσοι φοιτητές που δεν θα πάνε στο Συνέδριο δεν παρακολουθούν ούτε Πληροφορική ούτε Διακριτά.
  - $|\overline{\Sigma} \cap \overline{\Pi} \cap \overline{\Delta}| = |\overline{\Sigma \cup \Pi \cup \Delta}| = |\Phi| - |\Sigma \cup \Pi \cup \Delta| = 23$
  - $|\Sigma \cup \Pi \cup \Delta| =$
    $|\Sigma| + |\Pi| + |\Delta| - |\Sigma \cap \Delta| - |\Sigma \cap \Pi| - |\Pi \cap \Delta| + |\Sigma \cap \Pi \cap \Delta| =$
    $60 + 140 + 50 - 20 - 45 - 24 + 16 = 177$

# Παράδειγμα

- Πόσοι ακέραιοι στο {1, ..., 1000} διαιρούνται από το 7 ή το 11.
  - $A_7$ = { j ∈ [1000] : j διαιρείται από 7} $|A_7| = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$
    $A_{11}$ = { j ∈ [1000] : j διαιρείται από 11} $|A_{11}| = \lfloor 1000/11 \rfloor = 90$
  - |{j ∈ [M] : j διαιρείται από k}| = $\lfloor M/k \rfloor$
  - Ακέραιος j διαιρείται από $k_1$ και $k_2$ ανν j διαιρείται από ΕΚΠ($k_1$, $k_2$).
  - $|A_7 \cap A_{11}| = \lfloor 1000/(7 \cdot 11) \rfloor = 12$
  - $|A_7 \cup A_{11}| = |A_7| + |A_{11}| - |A_7 \cap A_{11}| = 142 + 90 - 12 = 220$.
- Πόσοι ακέραιοι στο {1, ..., 100} διαιρούνται από 2, 3, ή 5.
  - $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5|$
    $- |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$
  - $\ldots = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$

# Γενίκευση

- Τέσσερα σύνολα Α, Β, Γ, Δ: |Α ∪ Β ∪ Γ ∪ Δ|

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma \cup \Delta| = {} & |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| + |\Gamma| + |\Delta| \\
& -|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cap \Gamma| - |\mathrm{A} \cap \Delta| \\
& -|\mathrm{B} \cap \Gamma| - |\mathrm{B} \cap \Delta| - |\Gamma \cap \Delta| \\
& +|\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma| + |\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Delta| \\
& +|\mathrm{A} \cap \Gamma \cap \Delta| + |\mathrm{B} \cap \Gamma \cap \Delta| \\
& -|\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma \cap \Delta|
\end{aligned}
$$

# Γενίκευση

- n σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$: $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{J \subseteq [n]:|J|=k} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

  - Αριθμός όρων για n σύνολα: $2^n - 1$
  - Απόδειξη με επαγωγή στον αριθμό των συνόλων n.
  - Απόδειξη συνδυαστικά: κάθε στοιχείο της ένωσης «μετριέται» μία φορά στο άθροισμα δεξιά.

# Από 3 Σύνολα σε 4 Σύνολα

- Εφαρμόζοντας τη βασική ιδέα της επαγωγικής απόδειξης:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4| \\ &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4| &= |(A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4)| \\ &= |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\ &\quad -|A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_4| + |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\ &\quad -|A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ &\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad +|A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\end{aligned}$$

# Παράδειγμα

- 100 φοιτητές κυλικείο για καφέ, πίτσα, και μπουγάτσα.
  - Καθένα κοστίζει 1 ευρώ.
  - Συνολική είσπραξη 200 ευρώ.
  - 30 χάλασαν 3 ευρώ.
  - 75 χάλασαν τουλάχιστον 2 ευρώ.
  - Πόσοι ήρθαν μόνο για παρέα (δεν αγόρασαν τίποτα).
- Απάντηση: $100 - |K \cup \Pi \cup M|$
- Δεδομένα:
  - $|K \cap \Pi \cap M| = 30$
  - $|K \cap \Pi| + |K \cap M| + |\Pi \cap M| - 2|K \cap \Pi \cap M| = 75$
  - $|K \cap \Pi| + |K \cap M| + |\Pi \cap M| - |K \cap \Pi \cap M| = 105$
  - Συνολική είσπραξη 200 ευρώ, άρα $|K| + |\Pi| + |M| = 200$.
- $|K \cup \Pi \cup M| = 200 - 105 = 95$.
- Απάντηση: $100 - |K \cup \Pi \cup M| = \mathbf{5}$.

# Παράδειγμα

- Πόσοι αριθμοί στο {1, 2, ..., 48} είναι πρώτοι;
- Απάντηση: 47 – (#σύνθετων αριθμών ≤ 48)
  - Αριθμός *n* σύνθετος: έχει πρώτο παράγοντα $\leq \sqrt{n}$
  - Αριθμός $n \in \{2, 3, ..., 48\}$ σύνθετος:
    - Είναι διαφορετικός από 2, 3, 5, και διαιρείται από 2, 3, ή 5.
- Πόσοι αριθμοί στο {2, 3, ..., 48} διαιρούνται από 2, 3, ή 5.
  - $|A_2| = 24$, $|A_3| = 16$, $|A_5| = 9$, $|A_2 \cap A_3| = 8$, $|A_2 \cap A_5| = 4$, $|A_3 \cap A_5| = 3$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 1$.
  - $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 24 + 16 + 9 - 8 - 4 - 3 + 1 = 35$.
  - Προσοχή: έχουμε συμπεριλάβει 2, 3, και 5.
- Άρα (#σύνθετων αριθμών ≤ 48) = 35 – 3 = 32.
- (#πρώτων αριθμών ≤ 48) = 47 – 32 = **15**.

# Κόσκινο του Ερατοσθένη

- Υπολογισμός πρώτων αριθμών $\leq$ M.
  - Αρχικά όλοι οι φυσικοί στο {2, ..., M}.
  - Σε κάθε γύρο, θεωρούμε επόμενο διαθέσιμο αριθμό (είναι πρώτος) και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του που ξεπερνούν τον αριθμό και δεν έχουν διαγραφεί ήδη.
    - 1ος γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 2.
    - 2ος γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 3 (όχι του 2)
    - 3ος γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 5 (όχι των 2, 3), κοκ.
  - Τερματισμός όταν επόμενος διαθέσιμος αριθμός $> \sqrt{M}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **2** | **3** | 4 | **5** | 6 | **7** | 8 | **9** | 10 |
| **11** | 12 | **13** | 14 | **15** | 16 | **17** | 18 | **19** | 20 |
| **21** | 22 | **23** | 24 | **25** | 26 | **27** | 28 | **29** | 30 |
| **31** | 32 | **33** | 34 | **35** | 36 | **37** | 38 | **39** | 40 |
| **41** | 42 | **43** | 44 | **45** | 46 | **47** | 48 | | |