

Χρωματικός Αριθμός, Κάλυμμα Κορυφών

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

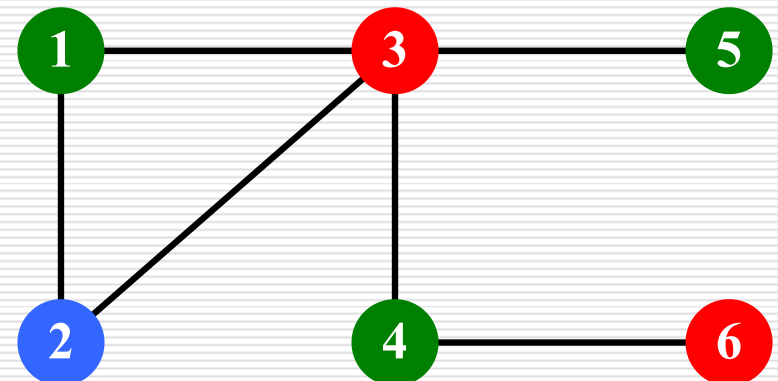
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



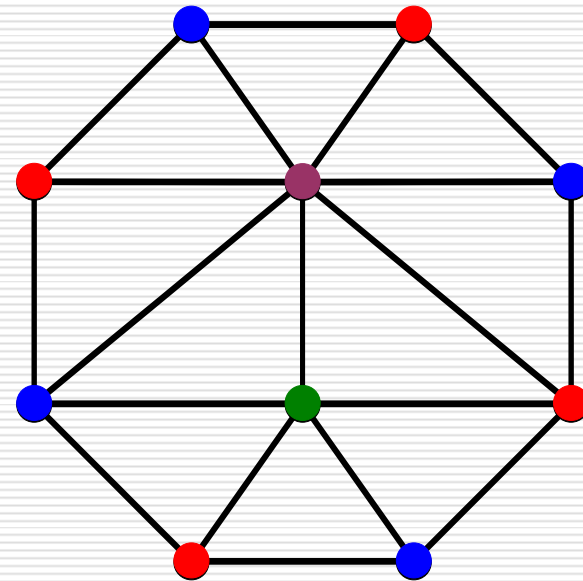
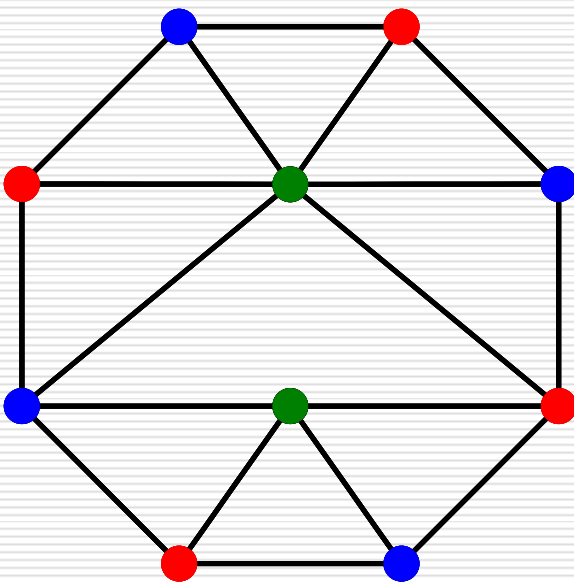
Χρωματικός Αριθμός

- **k-μερές γράφημα:** κορυφές του διαμερίζονται σε k ανεξάρτητα σύνολα.
 - Ενδιαφέρει **ελάχιστο** k για το οποίο γράφημα G είναι k -μερές.
 - Αυτό ταυτίζεται με **χρωματικό αριθμό** $\chi(G)$ γραφήματος G .
- **Χρωματικός αριθμός:** **ελάχιστος αριθμός χρωμάτων** για χρωματισμό κορυφών ώστε όλες οι **ακμές να έχουν άκρα διαφορετικού χρώματος**.
 - Κορυφές ίδιου χρώματος: ανεξάρτητο σύνολο.
 - Αν G περιέχει K_m , $\chi(G) \geq m$
 - $\chi(C_n) = 2$, αν n άρτιος, και 3 , αν n περιττός.
 - Επίπεδο γράφημα G , $\chi(G) \leq 4$.



Χρωματικός Αριθμός

- **Χρωματικός αριθμός:** ελάχιστος αριθμός χρωμάτων για χρωματισμό κορυφών ώστε όλες οι ακμές να έχουν άκρα διαφορετικού χρώματος.
- Κορυφές ίδιου χρώματος: ανεξάρτητο σύνολο.

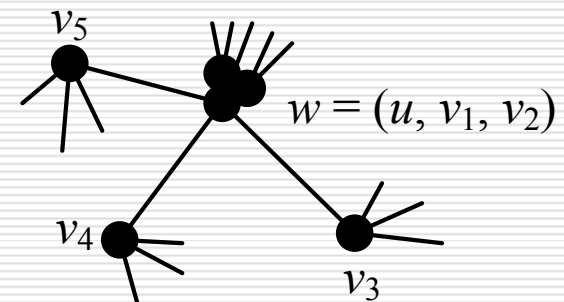
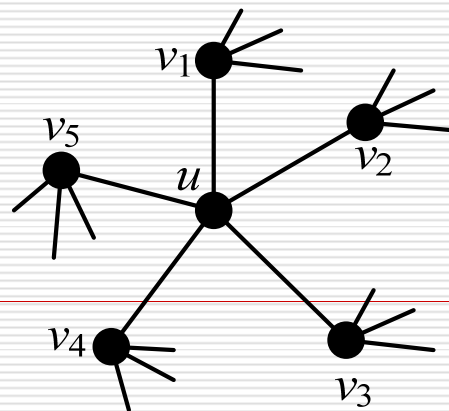


Άσκηση

- Νδο σε κάθε γράφημα $G(V, E)$, $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.
 - Βάση: Ισχύει για κάθε γράφημα με $n = 1, 2$ κορυφές.
 - Επαγωγική υπόθεση: για αυθαίρετα επιλεγμένο $n \geq 2$, ισχύει ότι $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ για κάθε γράφημα G με n κορυφές.
 - Επαγωγικό βήμα: Έστω γράφημα G' με $n+1$ κορυφές. Θδο $\chi(G') \leq \Delta(G')+1$.
 - Έστω αυθαίρετη κορυφή u του G' και $G_u = G' - u$.
 - Από επαγωγική υπόθεση: $\chi(G_u) \leq \Delta(G_u)+1 \leq \Delta(G')+1$.
 - Η κορυφή u παίρνει ένα από τα $\Delta(G')+1$ χρώματα.
 - Έγκυρος χρωματισμός γιατί $\deg(u) \leq \Delta(G')$: ένα από αυτά τα χρώματα δεν χρησιμοποιείται στη γειτονιά $N(u)$.
- Έστω συνεκτικό γράφημα G που δεν είναι πλήρες ούτε κύκλος περιττού μήκους. Τότε $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Άσκηση

- Νδο σε κάθε **επίπεδο** γράφημα $G(V, E)$, $\chi(G) \leq 5$.
 - **Βάση:** Ισχύει για κάθε επίπεδο γράφημα με $n = 1, 2, \dots, 5$ κορυφές.
 - **Επαγωγική υπόθεση:** για αυθαίρετα επιλεγμένο $n \geq 5$, ισχύει ότι $\chi(G) \leq 5$ για κάθε επίπεδο γράφημα G με n κορυφές.
 - **Επαγωγικό βήμα:** Επίπεδο γράφημα G' με $n+1$ κορυφές: $\chi(G') \leq 5$
 - Κορυφή u με **βαθμό ≤ 5** και $N(u) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.
 - (Τουλ.) **δύο** κορυφές στο $N(u)$ **δεν συνδέονται** (έστω οι v_1 και v_2).
 - G'' (επίπεδο) γράφημα όπου $\{u, v_1\}, \{u, v_2\}$ έχουν συμπτυχθεί σε w .
 - Επαγ. Υπόθ.: $\chi(G'') \leq 5$ με $\chi(w) = 1$, $\chi(v_k) = k$, $k = 3, 4, 5$
 - Θέτουμε $\chi(v_1) = \chi(v_2) = 1$, $\chi(u) = 2$.

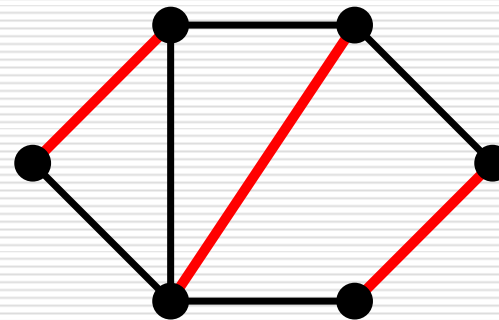
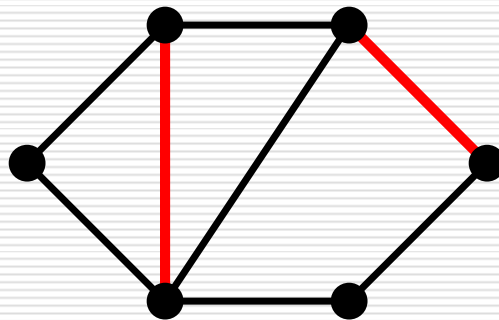


Σχέση με Ανεξάρτητα Σύνολα

- $\alpha(G)$: # κορυφών στο **μέγιστο** ανεξάρτητο σύνολο (independence number).
- Νδο σε κάθε γράφημα G , $n - \alpha(G) + 1 \geq \chi(G) \geq n / \alpha(G)$
 - Χρωματίζουμε **μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο** με ένα χρώμα και άλλες κορυφές με διαφορετικά χρώματα: $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$
 - $\alpha(G) \geq n / \chi(G)$ γιατί περισσότερες κορυφές με ίδιο χρώμα είναι τουλάχιστον τόσες.
- Νδο σε κάθε γράφημα G , $\chi(\overline{G}) \geq n / \chi(G)$.
 - Μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο I έχει τουλάχιστον $n / \chi(G)$ κορυφές.
 - Στο συμπληρωματικό γράφημα, οι κορυφές του I αποτελούν **πλήρες γράφημα** και χρειάζονται τουλάχιστον $n / \chi(G)$ χρώματα.

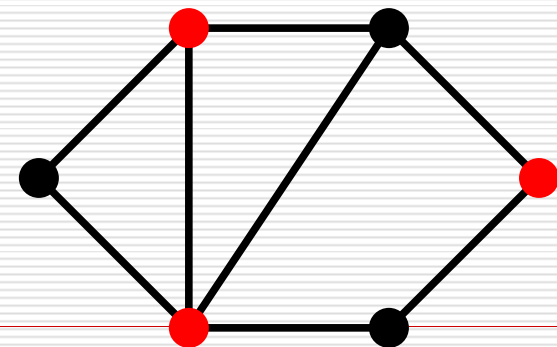
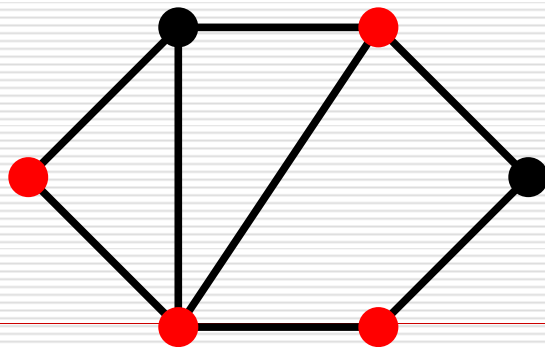
Ταιριάσματα (Matchings)

- **Ταίριασμα** σε γράφημα $G(V, E)$: σύνολο ακμών $M \subseteq E$ χωρίς κοινά άκρα.
 - Κορυφή βαθμού 1 στο M : **ταιριασμένη**. Διαφορετικά **ελεύθερη**.
 - M **τέλειο ταίριασμα** αν **όλες** οι κορυφές του G **ταιριασμένες**.
 - M **μέγιστο ταίριασμα** αν για κάθε ταίριασμα M' , $|M| \geq |M'|$.
 - M **μεγιστικό (maximal)** αν καμία ακμή στο E δεν έχει δύο ελεύθερα άκρα.
 - M **μεγιστικό** αν **ελεύθερες κορυφές** αποτελούν **ανεξάρτητο σύνολο**.



Κάλυμμα Κορυφών (Vertex Cover)

- Γράφημα $G(V, E)$: **κάλυμμα κορυφών** $C \subseteq V$ αν κάθε ακμή έχει τουλάχιστον **ένα από τα άκρα** της στο C .
 - C **κάλυμμα κορυφών** αν $V \setminus C$ ανεξάρτητο σύνολο.
 - $\beta(G)$: #κορυφών στο **ελάχιστο** κάλυμμα κορυφών.
 - Σε κάθε γράφημα G , $\beta(G) + \alpha(G) = n$



Κάλυμμα Κορυφών (Vertex Cover)

- Γράφημα $G(V, E)$: **κάλυμμα κορυφών** $C \subseteq V$ αν κάθε ακμή έχει τουλάχιστον **ένα από τα άκρα** της στο C .
 - C **κάλυμμα κορυφών** αν $V \setminus C$ ανεξάρτητο σύνολο.
 - $\beta(G)$: #κορυφών στο **ελάχιστο** κάλυμμα κορυφών.
 - Σε κάθε γράφημα G , $\beta(G) + \alpha(G) = n$
 - Έστω κάλυμμα κορυφών C και ταίριασμα M : $|C| \geq |M|$.
 - Αν $|C| = |M|$, το C είναι **ελάχιστο** κάλυμμα κορυφών και το M είναι **μέγιστο** ταίριασμα.

