

AVL Δέντρα

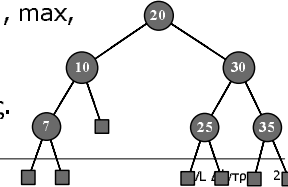
Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ζυγισμένα (Ισοροπημένα) ΔΔΑ

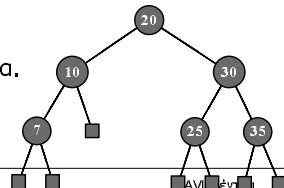
- Απόδοση ΔΔΑ (σύνολο λειτουργιών) : $O(\text{ύψος})$.
 - Αποδοτική δομή ενόσω δέντρο «κοντό» (compact).
 - Διαφορετικά, χ.π. εκφυλίζεται σε γραμμική λίστα.
- Απαιτούμε ζύγιση : **ύψος αριστερού \approx ύψος δεξιού.**
 - Ζυγισμένα ΔΔΑ : **ύψος = $\Theta(\log n)$.**
 - Σύνολο λειτουργιών : $O(\log n)$ χρόνος χ.π.
- Διελεύσεις, αναζήτηση, min, max, succ, pred, ... : όπως ΔΔΑ.
- Εισαγωγή, διαγραφή : διατηρούν συνθήκη ζύγισης.



Δομές Δεδομένων

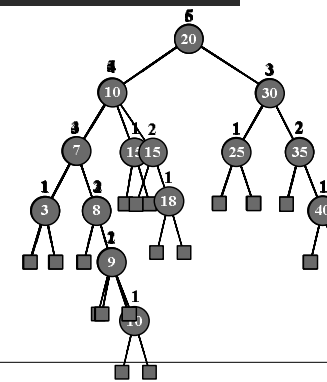
AVL Δέντρα

- ΔΔΑ όπου ύψη δύο υποδέντρων κάθε εσωτερικού κόμβου διαφέρουν το πολύ κατά 1.
- **AVL συνθήκη ζύγισης :**
 Ύψωσις v , $|\text{ύψος}(v \rightarrow \text{left}) - \text{ύψος}(v \rightarrow \text{right})| \leq 1$
- Ισχυρή συνθήκη ζύγισης για δυαδικά δέντρα.
- Προτάθηκαν 1962 από Adelson-Velskii και Landis.
- Δημοφιλή και πολύ γρήγορα.



Δομές Δεδομένων

AVL Δέντρα



Δομές Δεδομένων

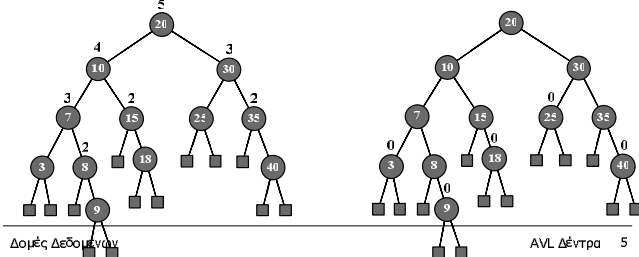
AVL Δέντρα 4

AVL Δέντρα

□ Αναπαράσταση:

- Ύψος κάθε εσωτερικού κόμβου (π.χ. νέο πεδίο *height*).
- Παράγοντας ζύγισης (π.χ. νέο πεδίο *bf*):

$$bf(v) = \text{ύψος}(v \rightarrow \text{left}) - \text{ύψος}(v \rightarrow \text{right})$$



Ύψος AVL Δέντρου

□ Ελάχιστο ύψος ΔΔΑ με n στοιχεία:

$$n \leq 1 + 2 + \dots + 2^{h-1} = 2^h - 1 \Rightarrow h \geq \log(n + 1)$$

□ Μέγιστο ύψος AVL δέντρου με n στοιχεία:

- Έστω N_h ελάχιστος #στοιχείων όταν ύψος h .

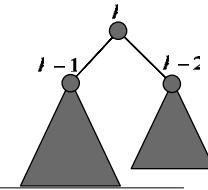
$$N_h \geq N_{h-1} + N_{h-2} + 1, N_1 = 1, N_2 = 2$$

■ Ακολουθία Fibonacci :

$$F_h = F_{h-1} + F_{h-2}, F_1 = 1, F_2 = 1$$

- $N_h \geq F_{h+1} \approx \phi^{h+1} / \sqrt{5}, \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$n \geq \phi^{h+1} / \sqrt{5} \Rightarrow h \leq 1.441 \log n$$

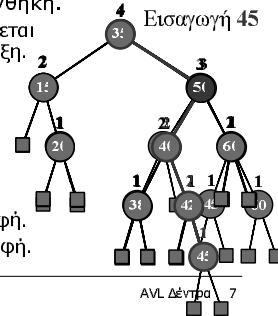


Δομές Δεδομένων

AVL Δέντρα 6

Εισαγωγή

- Εισαγωγή όπως ΔΔΑ όπου καταλήγει αναζήτηση.
- «Ανεβαίνω» μονοπάτι εισαγωγής (π.χ. με δείκτη *par*) και ενημερώνω ύψη / ελέγχω AVL συνθήκη.
 - Χαμηλότερο κόμβο όπου παραβιάζεται AVL συνθήκη, επαναζυγιστική πράξη.
 - Αλλαγή μορφής δέντρου ώστε να επανέλθει ζύγιση.



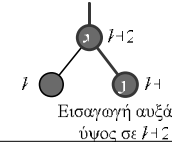
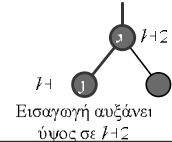
□ Δομικές επαναζυγιστικές πράξεις:

- Απλή (δεξιά ή αριστερή) περιστροφή.
- Διπλή (δεξιά ή αριστερή) περιστροφή.

Εισαγωγή

□ Παραβίαση AVL συνθήκης σε κόμβο x :

- «Μακρύ» και «κοντό» υποδέντρο με ρίζα x .
- Υποδέντρο ύψους $h+1$ και υποδέντρο ύψους h , και εισαγωγή αυξάνει ύψος $h+1$ σε $h+2$.
- Φορά περιστροφής : αριστερά ή δεξιά.
- Περιστροφή εξαρτάται από υποδέντρο y που έγινε εισαγωγή.
 - Μακρύ μονοπάτι είναι ευθεία : απλή περιστροφή.
 - Μακρύ μονοπάτι έχει γωνία : διπλή περιστροφή.

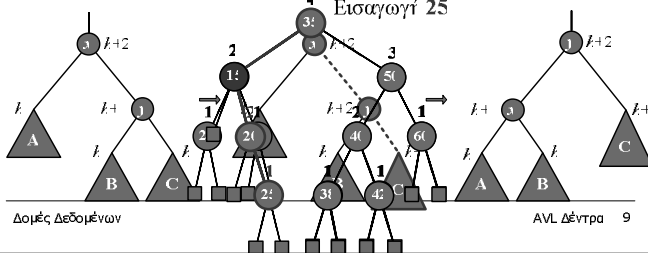


Δομές Δεδομένων

AVL Δέντρα 8

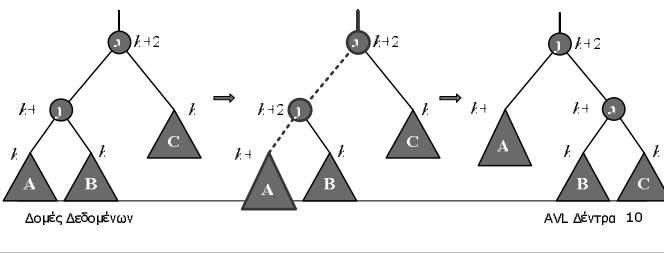
Απλή Αριστερή Περιστροφή

- Αν μακρύ μονοπάτι είναι ευθεία και δεξιό υποδέντρο : απλή αριστερή περιστροφή.
- Απλή περιστροφή διατηρεί ιδιότητα ΔΔΑ.
- Μετά περιστροφή, ύψος υποδέντρου όσο πριν εισαγωγή:
 - Επαναζύγιση τερματίζει : τερματική περιστροφή.



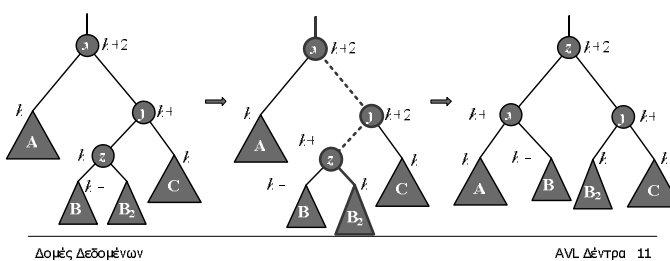
Απλή Δεξιά Περιστροφή

- Αν μακρύ μονοπάτι είναι ευθεία και αριστερό υποδέντρο : απλή δεξιά περιστροφή.
- Απλή περιστροφή διατηρεί ιδιότητα ΔΔΑ.
- Μετά περιστροφή, ύψος υποδέντρου όσο πριν εισαγωγή:
 - Επαναζύγιση τερματίζει : τερματική περιστροφή.



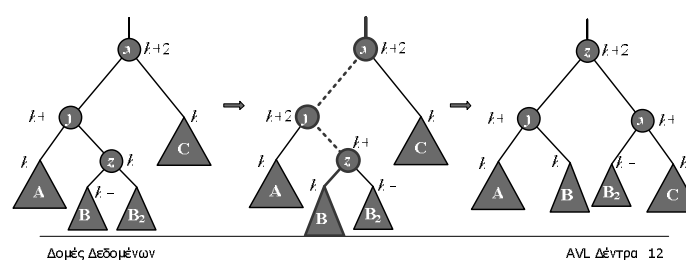
Διπλή Αριστερή Περιστροφή

- Αν μακρύ μονοπάτι έχει γωνία (στο γ) και δεξιό υποδέντρο: διπλή αριστερή περιστροφή (τερματική).
 - Ίδια περιστροφή αν εισαγωγή στο B_1 .
- Διπλή περιστροφή διατηρεί ιδιότητα ΔΔΑ.



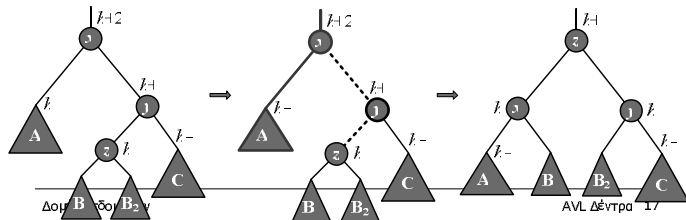
Διπλή Δεξιά Περιστροφή

- Αν μακρύ μονοπάτι έχει γωνία (στο γ) και αριστερό υποδέντρο : διπλή δεξιά περιστροφή (τερματική).
 - Ίδια περιστροφή αν εισαγωγή στο B_2 .
- Διπλή περιστροφή διατηρεί ιδιότητα ΔΔΑ.



Διπλή Περιστροφή

- Αν μακρύ μονοπάτι έχει γωνία ($\text{ύψος}(C) = h - 1$) : διπλή περιστροφή.
- Μετά περιστροφή, ύψος μειώνεται σε $h + 1$:
 - $\text{ύψος}(B_1), \text{ύψος}(B_2) < h - 1$.
 - Διπλή περιστροφή κατά τη διαγραφή : μη-τερματική.



Δομές Δεδομένων

AVL Δέντρα 17

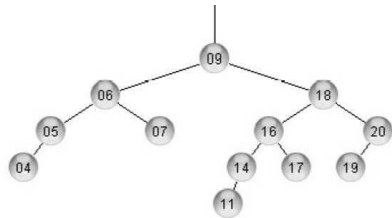
Διαγραφή

- Χρόνος εκτέλεσης : $O(\log n)$
 - Αναζήτηση και διαγραφή : $O(\log n)$
 - Μη-δομικές επαναζυγιστικές πράξεις : $O(\log n)$
 - Ενημέρωση ύψους / παράγοντα ζύγισης
 - $O(\log n)$ περιστροφές : $O(\log n)$
 - Περιστροφή μπορεί να μην είναι τερματική αλλά διορθώνει μέχρι επίπεδο που συμβαίνει.
 - Επόμενη περιστροφή σε ψηλότερο επίπεδο (πλησιέστερα στη ρίζα).

Δομές Δεδομένων

AVL Δέντρα 18

Παράδειγμα Διαγραφής



- Διαγραφή 7, 11, 14, 4, 5, 20.

Δομές Δεδομένων

AVL Δέντρα 19

Επαναζυγιστικές Πράξεις σε ΖΔΔΑ

- Λειτουργίες ερώτησης (αναζήτηση, min, max, succ, pred) όπως μη-ζυγισμένα ΔΔΑ.
- Λειτουργίες τροποποίησης διατηρούν δέντρο ζυγισμένο μετά από εισαγωγή / διαγραφή.
 - Εισαγωγή / διαγραφή στοιχείων όπως ΔΔΑ.
 - Επαναζύγιση στο μονοπάτι εισαγωγής / διαγραφής:
 - Μη-δομικές επαναζυγιστικές πράξεις: μεταβολή πληροφορίας ζύγισης (π.χ. ύψος, παράγοντας ζύγισης)
 - Δομικές επαναζυγιστικές πράξεις: απλή και διπλή περιστροφή.

Δομές Δεδομένων

AVL Δέντρα 20

Περιστροφές

- Δομικές πράξεις: επαναφέρουν ζύγιση μεταβάλλοντας μορφή δέντρου.
- Δέντρο «μακραίνει στα άκρα» (LL, RR): απλή περιστροφή.
- Δέντρο «μακραίνει στη μέση» (LR, RL): διπλή περιστροφή.
 - Χρόνος εκτέλεσης: $O(1)$.
 - Διατηρούν την ιδιότητα των ΔΔΑ.
- Τερματική αν επαναζύγιση δεν συνεχίζει προς τη ρίζα.

Δομές Δεδομένων

AVL Δέντρα 21

Ασκήσεις

- Μη-ζυγισμένο ΔΔΑ:
 - Εισαγωγή: 9, 15, 7, 18, 20, 17, 25, 30.
 - Διαγραφή: 18, 20, 9.
- AVL δέντρο:
 - Εισαγωγή: 9, 15, 7, 18, 20, 17, 25, 30.
 - Διαγραφή: 17, 7, 18, 9.
- Πώς «ανεβαίνουμε» μονοπάτι προς ρίζα αν δεν έχουμε δείκτη parent (για οικονομία σε χώρο);

Δομές Δεδομένων

AVL Δέντρα 22