Επιλογή

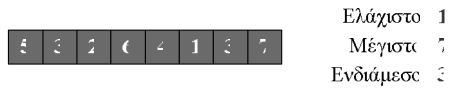
Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πρόβλημα Επιλογής

- Πίνακας A[ ] με n στοιχεία (όχι ταξινομημένος). Αριθμός k, $1 \le k \le n$.
- Υπολογισμός του k-οστού μικρότερου στοιχείου (στοιχείο θέσης A[k] αν A ταξινομημένος).
  - $k = 1$: ελάχιστο. $k = n$: μέγιστο.
    $k = n / 2$: ενδιάμεσο (median).



Εφαρμογές

- Υπολογισμός στατιστικού ενδιάμεσου (median).
  - Χρήσιμες πληροφορίες για κατανομή.
  - Ανήκει η Ελλάδα στο φτωχότερο 25% των χωρών ΕΕ;
  - Ανήκει κάποιο φοιτητής στο καλύτερο 10% του έτους του;
- Ισομερής διαίρεση (partition) πίνακα σε ομάδες «ταξινομημένες» μεταξύ τους.
- Ενδιαφέρον αλγοριθμικό πρόβλημα!

Μέγιστο / Ελάχιστο

- Μέγιστο (ελάχιστο) εύκολα σε χρόνο $\Theta(n)$, με $n - 1$ συγκρίσεις μεταξύ στοιχείων.

```
int maximum(int A[], int n) {
   int max = A[0], i;
   for (i = 1; i < n; i++)
      if (A[i] > max) max = A[i];
   return(max);    }
```

- Μέγιστο και ελάχιστο με $3n / 2 - 2$ συγκρίσεις ! **Πώς;**

Κάτω Φράγμα για Μέγιστο

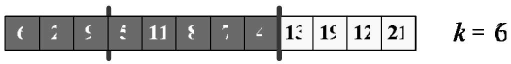
- Κάθε ντετερμινιστικός συγκριτικός αλγόριθμος χρειάζεται $\geq n - 1$ συγκρίσεις για μέγιστο (ελάχιστο).
  - «Πρωτάθλημα» μεταξύ στοιχείων.
  - Σύγκριση στοιχείων : αγώνας όπου κερδίζει μεγαλύτερο.
  - Κάθε «αήττητο» στοιχείο είναι υποψήφιο μέγιστο.
  - Για μοναδικό μέγιστο, πρέπει τα υπόλοιπα να «ηττηθούν».
  - Κάθε αγώνας δίνει ένα «ηττημένο» στοιχείο
  - $\geq n - 1$ αγώνες / συγκρίσεις για μοναδικό μέγιστο.

Επιλογή

- Σε χρόνο $O(n \log n)$ με ταξινόμηση.
- Μέγιστο ($k = 1$), ελάχιστο ($k = n$) : Γραμμικό χρόνο $\Theta(n)$.
- Άλλες τιμές k : χρόνος $O(n \log n)$ ή $O(n)$;
- Επιλογή σε γραμμικό χρόνο με διαίρει-και-βασίλευε βασισμένη σε διαίρεση της quicksort !

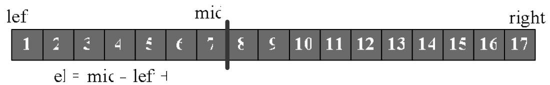
Πιθανοτική Quickselect

- **Τυχαίο** στοιχείο διαχωρισμού (pivot).
- Αναδιάταξη και διαίρεση εισόδου σε δύο υπο-ακολουθίες:
  - Στοιχεία αριστερής $[l \ldots q]$ υπο-ακολ. < στοιχείο διαχωρισμού.
  - Στοιχεία δεξιάς $[q+1 \ldots r]$ υπο-ακολ. > στοιχείο διαχωρισμού.
- Αν $k \leq q$, αναδρομική λύση $(A[l \ldots q], k)$
  Αν $k > q$, αναδρομική λύση $(A[q+1 \ldots r], k - (q - l + 1))$



Ορθότητα Quickselect

- Τερματισμός : μέγεθος υπο-ακολουθιών $\leq n - 1$.
- Επαγωγικά υποθέτω ότι $1 \leq k \leq$ right − left + 1.
  - Αν $1 \leq k \leq$ el, δεξιά στοιχεία «αποκλείονται».
  - Αν el < $k \leq$ right − left + 1, αριστερά στοιχεία «αποκλείονται» και k μειώνεται αντίστοιχα (k' = k − el).



Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

- Χρόνος εκτελ. αναδρομικών αλγ. με διατύπωση και λύση αναδρομικής εξίσωσης λειτουργίας.
- ***T(n)*** : χρόνος (χ.π.) για επιλογή από *n* στοιχεία.
- Χρόνος εκτέλεσης **partition**(*n* στοιχεία) : Θ(*n*)
- Χειρότερη περίπτωση : ένα στοιχείο «αποκλείεται» σε κάθε διαίρεση!

$$T(n) = \Theta(n) + T(n-1)\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(n-1) + \Theta(n-2) + \cdots + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

- Πιθανοτικός αλγ.: χειρότερη περίπτωση έχει εξαιρετικά μικρή πιθανότητα να συμβεί (για κάθε είσοδο) !

Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

- Τυχαίο στοιχείο σαν στοιχείο χωρισμού (pivot).
- Για κάθε $i \in [n-1]$, πιθανότητα διαίρεσης (*i*, *n* – *i*) = $\dfrac{1}{n-1}$

$$S(n) = \Theta(n) + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} S(\max\{i, n-i\})$$

$$= \Theta(n) + \frac{2}{n-1}\sum_{i=n/2}^{n-1} S(i)$$

- Λύση αναδρομής : $S(n) = \Theta(n)$

Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

- **Καλή περίπτωση** : διαίρεση (*n* / 4, 3*n* / 4) ή καλύτερη.
  - Τουλάχιστον *n* / 4 στοιχεία «αποκλείονται».
- Πιθανότητα «καλής περίπτωσης» ≥ **1/2** !
  - Κατά «μέσο όρο», μία «κακή διαίρεση» πριν από «καλή διαίρεση» που μειώνει στοιχεία από *n* σε < 3*n* /4.

$$S(n) = \Theta(n) + S(3n/4)$$

- Λύση αναδρομής : $S(n) = \Theta(n)$
  - Γεωμετρική σειρά :

$$S(n) = \Theta(n) + \Theta(\tfrac{3}{4}n) + \Theta((\tfrac{3}{4})^2 n) + \Theta((\tfrac{3}{4})^3 n) + \cdots + \Theta(1) = \Theta(n)$$

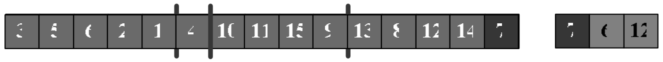
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Ντετερμινιστική Επιλογή

- «Καλή διαίρεση» ντετερμινιστικά:
  - Χρήση pivot **κοντά** στο ενδιάμεσο: πρόβλημα επιλογής!
  - Φαύλος κύκλος : γρήγορη επιλογή → καλή διαίρεση → γρήγορη επιλογή.
- Προσεγγιστική επιλογή : όχι «ενδιάμεσο» αλλά «κοντά στο ενδιάμεσο» για pivot.
  - Επιλογή **κατάλληλου** δείγματος (π.χ. *n* / 5 στοιχεία).
  - Ενδιάμεσο δείγματος είναι «κοντά στο ενδιάμεσο» για σύνολο στοιχείων.
  - Αναδρομικά ενδιάμεσο στοιχείο του δείγματος.
  - Ενδιάμεσο δείγματος για pivot εγγυάται «καλή διαίρεση».

Ντετερμινιστική Επιλογή

- Δείγμα: Χωρίζουμε στοιχεία σε 5άδες.
  Βρίσκουμε ενδιάμεσο κάθε 5άδας: n / 5 στοιχεία.
  - Χρόνος : Θ(n).
- Αναδρομικά, ενδιάμεσο στοιχείο δείγματος.
  - Χρόνος : T(n / 5)
- Διαίρεση με ενδιάμεσο δείγματος σαν pivot.
  - Χρόνος : Θ(n).
  - Μεγαλύτερος υποπίνακας ≤ 7n / 10 στοιχεία.
- Αναδρομική επιλογή: χρόνος T(7n / 10)

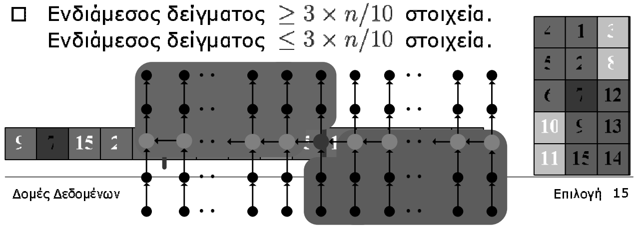


Ντετερμινιστική Επιλογή

- Χρόνος χειρότερης περίπτωσης:
  $T(n) = \Theta(n) + T(n/5) + T(7n/10)\,,\quad T(1) = \Theta(1)$
- Λύση αναδρομής : $T(n) = \Theta(n)$
- Ντετερμινιστική επιλογή σε γραμμικό χρόνο!

Ενδιάμεσο Δείγματος

- Διαίρεση με ενδιάμεσο δείγματος σαν pivot.
  - Μεγαλύτερος υποπίνακας ≤ 7n / 10 στοιχεία.
    Μικρότερος υποπίνακας ≥ 3n / 10 στοιχεία.
- Ταξινομούμε 5αδες και βάζουμε σε αύξουσα σειρά των ενδιάμεσων στοιχείων τους (δείγματος).
- Ενδιάμεσος δείγματος στη (n / 10)-οστή στήλη.
- Ενδιάμεσος δείγματος $\geq 3 \times n/10$ στοιχεία.
  Ενδιάμεσος δείγματος $\leq 3 \times n/10$ στοιχεία.



Σύνοψη

- Γρήγορη επιλογή (quickselect):
  - Πιθανοτικός αλγόριθμος με γραμμικό χρόνο (μ.π.)
  - Ντετερμινιστικός αλγόριθμος με γραμμικό χρόνο (χ.π.)
  - Ντετερμινιστικός αλγόριθμος με «bootstrapping»:
    - Για να βρω ενδιάμεσο για πολλά στοιχεία, βρίσκω ενδιάμεσο για λίγα.
    - Αυτό βοηθάει να βρω ενδιάμεσο για περισσότερα, …

Ασκήσεις

- Τροποποίηση quicksort ώστε O(*n* log *n*) χρόνο σε χειρότερη περίπτωση. Είναι πρακτικό;
- $T(n) = \Theta(n) + T(n/c) + T(n/d)\,, \quad T(1) = \Theta(1)$
  - $1/c + 1/d < 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$
  - $1/c + 1/d = 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$
- Στον ντετερμινιστικό αλγόριθμο, χωρίζω στοιχεία σε 3άδες (7άδες). Τι συμβαίνει;
- Α και Β δύο ταξινομημένοι πίνακες με *n* στοιχεία ο καθένας. Σε χρόνο O(log *n*), το ενδιάμεσο της ένωσης των Α και Β.