Μη-Ντετερμινισμός και NP-Πληρότητα

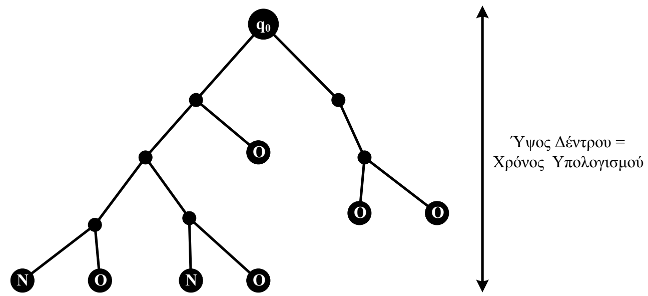
Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Μη-Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- Τρέχουσα διαμόρφωση $\to$ **πολλές** επόμενες διαμορφώσεις!
- **Μη-Ντετερμινιστική** Μηχ. Turing $N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ με $k \geq 1$ ταινίες:
  - Q **σύνολο καταστάσεων**. $F \subseteq Q$ **τελικές** καταστάσεις.
  - Σ **αλφάβητο εισόδου**. $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$ **αλφάβητο ταινίας**.
  - $q_0 \in Q$ **αρχική κατάσταση**.
  - $\Delta \subseteq ((Q \setminus F) \times \Gamma^k) \times (Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k)$ **σχέση μετάβασης**!
- Ντετερμινιστική TM: **Μονοπάτι**.
- Μη-Ντετερμινιστική TM: **Δέντρο**!

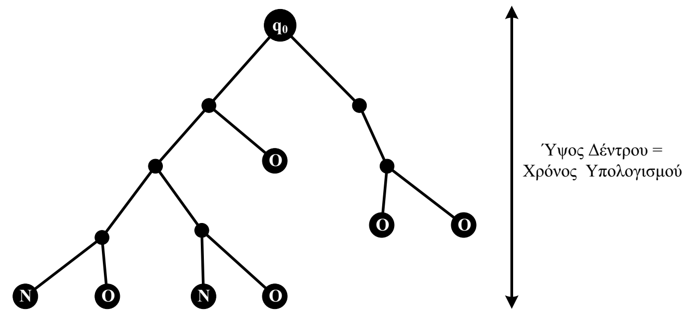


Αποδοχή και Απόρριψη

- N έχει πολλές **υπολογιστικές εκδοχές** και **απαντήσεις**. Διαλέγει την "πλέον επιθυμητή".
- N **αποδέχεται** x αν **υπάρχει** υπολογισμός που καταλήγει σε ΝΑΙ.
- N **απορρίπτει** x αν **όλοι** υπολογισμοί καταλήγουν σε ΟΧΙ.
- Μη-Ντετερμινισμός: **Δικτατορία της Αποδοχής**!
- N **αποφασίζει** γλώσσα $\mathcal{L}$: $\forall x \in \Sigma^*$, $x \in \mathcal{L} \Leftrightarrow N(x) = \text{ΝΑΙ}$.

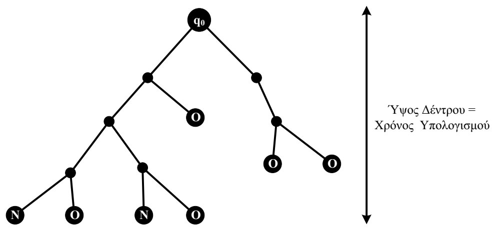
Μη-Ντετερμινιστική Χρονική Πολυπλοκότητα

- **Χρόνος εκτέλεσης** $t(n)$: $\forall x, |x| = n$, **όλοι κλάδοι** $N(x)$ μήκους $\leq t(n)$.
- **Μη-Ντετερμινιστική Πολυπλοκότητα** Π: Πολυπλοκότητα γρηγορότερης N που λύνει Π.
- $\mathrm{NTIME}[t(n)] \equiv \{\Pi : \Pi$ λύνεται σε μη-ντετερμινιστικό χρόνο $\mathrm{O}(t(n))\}$
- **Όχι ρεαλιστικό** υπολογιστικό μοντέλο! **Πολλές εφαρμογές**!



NTIME και DTIME

- $\mathbf{NTIME}[t(n)] \subseteq \bigcup_{c>1} \mathbf{DTIME}[c^{t(n)}]$
  Ντετερμινιστική προσομοίωση με **εκθετική** επιβάρυνση.
  - Προσομοίωσε **όλα** τα δέντρα υπολογισμού $N(x)$ ύψους $t = 1, 2, \ldots, t(|x|)$.
  - Σταμάτησε σε **αποδοχή** (πρώτο ΝΑΙ) ή **απόρριψη** (όλα ΟΧΙ, ΤΕΛΟΣ).
  - d-αδικό δέντρο υπολογισμού $N(x)$:
    Συνολικός χρόνος: $\sum_{t=1}^{t(n)} \mathrm{O}(d^t) = \mathrm{O}(d^{t(n)+1})$
- Αποφασίσιμο NDTM = Αποφασίσιμο DTM. **Αξίωμα Church-Turing**.



Η Κλάση NP

- $\mathbf{NP} \equiv \bigcup_{d \geq 0} \mathbf{NTIME}[n^d]$
  Πολυωνυμικός **μη-ντετερμινιστικός** υπολογιστικός χρόνος.
- $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$. Πιστεύουμε ότι $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ (αλλά δεν ξέρουμε!).
- Ικανοποιησιμότητα λογικής πρότασης $\in \mathbf{NP}$.
- Κύκλος Hamilton $\in \mathbf{NP}$.
- Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή $\in \mathbf{NP}$.
- Πρόβλημα Σακιδίου $\in \mathbf{NP}$.
- **Δύσκολο** να σκεφθείτε πρόβλημα $\notin \mathbf{NP}$.

Χαρακτηρισμός NP

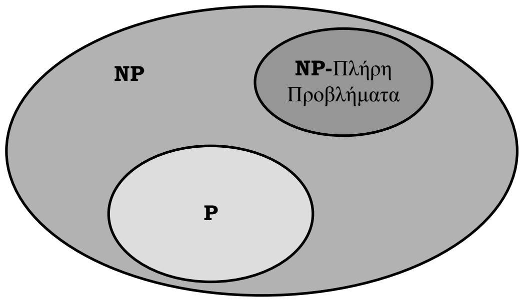
- $\mathcal{L} \in \mathbf{NP} \Leftrightarrow \forall w \in \mathcal{L}$ υπάρχει **σύντομο πιστοποιητικό** c.
  Πιστοποιητικό: με (w, c) **ντετ. πολυωνυμική** επιβεβαίωση ότι $w \in \mathcal{L}$.
  Σύντομο: $|c| \leq |w|^k$.
  - Υπάρχει σύντομο πιστοποιητικό $c \Rightarrow$
    μη-ντετ. Τ.Μ. **δημιουργεί** c και **επιβεβαιώνει** ότι $w \in \mathcal{L}$.
  - $|c|$ πολυωνυμικό και ντετ. πολυωνυμική επιβεβαίωση $\Rightarrow \mathcal{L} \in \mathbf{NP}$.
  - $\mathcal{L} \in \mathbf{NP}$ αποφασίζεται από μη-ντετ. Τ.Μ. N χρόνου $n^k \Rightarrow$
    κωδικοποίηση **υπολογισμού αποδοχής** $N(w)$ αποτελεί πιστοποιητικό c.
  - c κωδικοποιεί επιλογές που οδήγησαν σε αποδοχή.
    Επαληθευτής προσομοιώνει μόνο κλάδο που υποδεικνύεται από c.
- **Επαληθευτής** για $\mathcal{L}$: ντετερμινιστική Μ.Τ. V που
  – $\forall w \in L$, $\exists c$ ώστε $V(w, c) =$ ΝΑΙ, και
  – $\forall w \notin L$, $\forall c$, $V(w, c) =$ ΟΧΙ.
- **NP** είναι το σύνολο των γλωσσών με **πολυωνυμικούς επαληθευτές**.

Κλειστότητα NP

- **NP** είναι κλειστό ως προς ένωση, τομή, και πολυωνυμική αναγωγή.
- **NP** είναι κλειστό ως προς **συμπλήρωμα**; **Μάλλον όχι**.

NP Πληρότητα

- Π είναι **NP-πλήρες** αν $\Pi \in \mathbf{NP}$ και κάθε πρόβλημα $\Pi' \in \mathbf{NP}$ **ανάγεται πολυωνυμικά** στο Π.
- Π είναι από τα **δυσκολότερα** προβλήματα στο **NP**.
- **NP**-πλήρες πρόβλημα $\Pi \in \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
  Κάθε $\Pi' \in \mathbf{NP}$ **ανάγεται** στο Π και λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.



Άσκηση

- $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathbf{NP}$: Π_1 **ανάγεται πολυωνυμικά** στο Π_2.
  1. $\Pi_1 \in \mathbf{P} \Rightarrow \Pi_2 \in \mathbf{P}$;
  2. $\Pi_2 \in \mathbf{P} \Rightarrow \Pi_1 \in \mathbf{P}$;
  3. Π_2 όχι **NP**-πλήρες $\Rightarrow$ Π_1 όχι **NP**-πλήρες;
  4. Π_1 και Π_2 **NP**-πλήρη $\Rightarrow$ Π_2 ανάγεται στο Π_1;

NP-Πλήρη Προβλήματα

- **Ικανοποιησιμότητα**: Λογική πρόταση ϕ σε ΣΚΜ. ϕ ικανοποιήσιμη;
- **[Cook-Levin]** Ικανοποιησιμότητα **NP**-πλήρης.
- **Ιδέα**: Λειτουργία $N(x)$ πολυωνυμικού χρόνου **κωδικοποιείται** σε λογική πρόταση ϕ πολυωνυμικού μεγέθους.
- Υπάρχει **υπολογισμός αποδοχής** στο $N(x) \Leftrightarrow$
  Υπάρχει **αποτίμηση** που ικανοποιεί ϕ.

NP-Πλήρη Προβλήματα

- **3-Ικανοποιησιμότητα**: Λογική πρόταση ϕ σε 3-ΣΚΜ. ϕ ικανοποιήσιμη;
- 3-Ικανοποιησιμότητα **NP**-πλήρης.
- Ικανοποιησιμότητα **ανάγεται** σε 3-Ικανοποιησιμότητα.
- Όρος $c_j = \ell_{j_1} \vee \ldots \vee \ell_{j_k}$ ισοδύναμος με

$$\begin{aligned} c'_j &= (\ell_{j_1} \vee \ell_{j_2} \vee z_{j_1}) \wedge (\neg z_{j_1} \vee \ell_{j_3} \vee z_{j_2}) \wedge (\neg z_{j_2} \vee \ell_{j_4} \vee x_{j_3}) \wedge \ldots \\ &\quad \wedge(\neg z_{j_{k-4}} \vee \ell_{j_{k-2}} \vee z_{j_{k-3}}) \wedge (\neg z_{j_{k-3}} \vee \ell_{j_{k-1}} \vee \ell_{j_k}) \end{aligned}$$

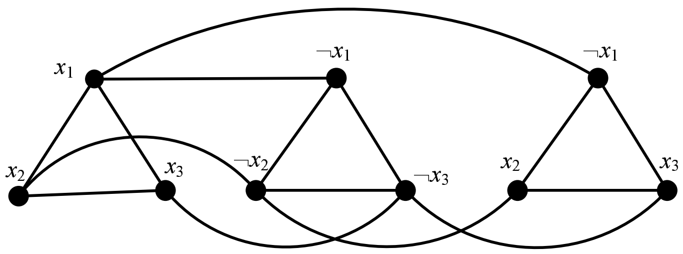
- c'_j ικανοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ c_j ικανοποιήσιμος

$$z_{j_i} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i < p-1 \\ 0 & \text{αν } i \geq p-1 \end{cases}$$

NP-Πλήρη Προβλήματα

- **Μέγιστο Σύνολο Ανεξαρτησίας**: Γράφημα $G(V,E)$ και ≥ 0.
  Έχει G σύνολο ανεξαρτησίας με $\geq B$ κορυφές;
- Μέγιστο Σύνολο Ανεξαρτησίας **NP**-πλήρες.
- 3-Ικανοποιησιμότητα ϕ **ανάγεται** Μέγιστο Σύνολο Ανεξαρτησίας G_ϕ.
- Όρος $c_j = \ell_{j_1} \vee \ell_{j_2} \vee \ell_{j_3} \to$ **Τρίγωνο**.
- Ακμή $(x_i, \neg x_i)$ για **συμπληρωματικές εμφανίσεις** κάθε μεταβλητής x_i.
- Μέγιστο Σύνολο Ανεξαρτησίας$(G_\phi) = m \Leftrightarrow$ Ικανοποιήσιμη ϕ.

$(x1 \vee x2 \vee x3) \wedge$
$(\neg x1 \vee \neg x2 \vee \neg x3)$
$\wedge(\neg x1 \vee x2 \vee x3)$



NP-Πλήρη Προβλήματα

- Μέγιστη Κλίκα - Ελάχιστο Σύνολο Κάλυψης.
- Ελάχιστο Κάλυμμα Συνόλων.
- Χρωματισμός Γραφημάτων - **Ανάθεση Συχνοτήτων**.
- Κύκλος Hamilton - **Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή**.
- Ακέραιο Πρόβλημα Σακιδίου.
- Δρομολόγηση **Unsplittable** Εργασιών σε **Παράλληλες Μηχανές**.
- Δρομολόγηση **Unsplittable** Κυκλοφορίας σε **Δίκτυα**.
- **Χωροθέτηση Εξυπηρετητών**.
- ...