# Ελάχιστα Επικαλύπτοντα Δέντρα

**Δημήτρης Φωτάκης**

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

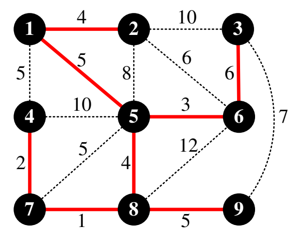
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

## Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο (ΕΕΔ - MST)

- Συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές. Βάρη ακμών $w : E \mapsto \mathbb{R}_+^*$.
- Βάρος επικαλύπτοντος υπογραφήματος $T(V, E_T)$: $w(T) = \sum_{e \in E_T} w(e)$.
- **Ζητούμενο:** Συνεκτικό επικαλύπτον υπογράφημα **ελάχιστου** βάρους.

  Συνεκτικό (εξ' ορισμού) + Άκυκλο (ελάχιστο, θετικά βάρη) $\Rightarrow$ **Δέντρο**.
- **Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο** $\equiv$ επικαλύπτον δέντρο με ελάχιστο συνολικό βάρος ακμών.
- Υπολογισμός ΕΕΔ: Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης με **πολλές εφαρμογές**.

  Σχεδιασμός συνεκτικού (οδικού, τηλεπικοινωνιακού, ηλεκτρικού, κοκ.) δικτύου ελάχιστου κόστους.





## Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

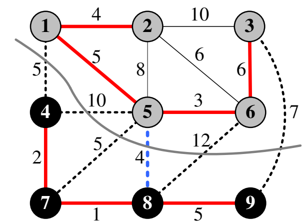
- **Δέντρο** $\equiv$ **Ακυκλικό** και **Συνεκτικό** γράφημα.
- **Θεώρημα.** Ισοδύναμα για κάθε απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$:
  1. $G$ δέντρο.
  2. Κάθε ζευγάρι κορυφών του $G$ ενώνεται με μοναδικό μονοπάτι.
  3. $G$ ελαχιστοτικά συνεκτικό.
  4. $G$ συνεκτικό και $|E| = |V| - 1$.
  5. $G$ ακυκλικό και $|E| = |V| - 1$.
  6. $G$ μεγιστοτικά ακυκλικό.



## Τομές, Σύνολα Τομής, και ΕΕΔ

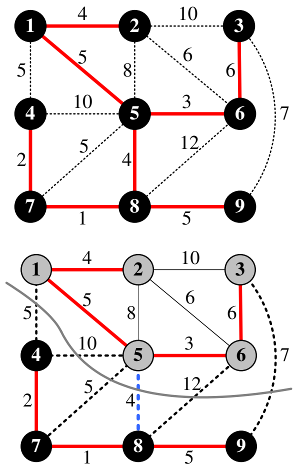
- **Τομή** $(S, V \setminus S)$ $\equiv$ διαμέριση κορυφών σε σύνολα $S$ και $V \setminus S$.
- **Σύνολο Τομής** $\delta(S, V \setminus S)$ $\equiv$ ακμές με ένα άκρο στο $S$ και άλλο στο $V \setminus S$.
- Ακμή $e$ διασχίζει τομή $(S, V \setminus S)$ αν $e \in \delta(S, V \setminus S)$.

  Σύνολο ακμών $E'$ διασχίζει τομή $(S, V \setminus S)$ αν $E' \cap \delta(S, V \setminus S) \neq \emptyset$.
- (Ε)ΕΔ $\equiv$ σύνολο ακμών (ελάχιστου) συνολικού βάρους που διασχίζει όλες τις τομές.



# Άπληστος Υπολογισμός ΕΕΔ

- $T(V, E_T)$ ΕΕΔ για γράφημα $G(V, E, w)$.
- **Αφαιρώ ακμή** $e$ από $T \Rightarrow$
  Δύο συνεκτικές συνιστ. με κορυφές $S$ και $V \setminus S$.
- $T_S$ και $T_{V\setminus S}$ είναι **ΕΕΔ** για υπογρ. $G_S$ και $G_{V\setminus S}$
  **Ιδιότητα Βέλτιστων Επιμέρους Λύσεων**
- $e$ **ελάχιστου βάρους** ακμή που διασχίζει $(S, V \setminus S)$
  **Ιδιότητα Άπληστης Επιλογής**
- Υπάρχει **άπληστος αλγόριθμος** για ΕΕΔ!





# Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΕΔ

- Έστω $\Delta$ σύνολο ακμών χωρίς κύκλους (δάσος).
  Ακμή $e \notin \Delta$ ονομάζεται **ακμή επαύξησης** για $\Delta$ όταν:
  1. $\Delta$ δάσος $\Rightarrow \Delta \cup \{e\}$ δάσος.
  2. $\Delta \subseteq$ ενός ΕΕΔ $\Rightarrow \Delta \cup \{e\} \subseteq$ ενός ΕΕΔ.

```
MST(G(V,E,w))
    Δ ← ∅;
    while |Δ| < n − 1 do
        Υπολόγισε μια ακμή επαύξησης e για Δ;
        Δ ← Δ ∪ {e};
    return(Δ);
```

- Αρχικά $\Delta = \emptyset \subseteq$ κάθε ΕΕΔ και δάσος.
- **Επαγωγικά**, $e$ ακμή επαύξησης για $\Delta \Rightarrow \Delta \cup \{e\} \subseteq$ ενός ΕΕΔ και δάσος.
- $|\Delta| = n - 1 \Rightarrow \Delta$ **είναι ένα ΕΕΔ**.



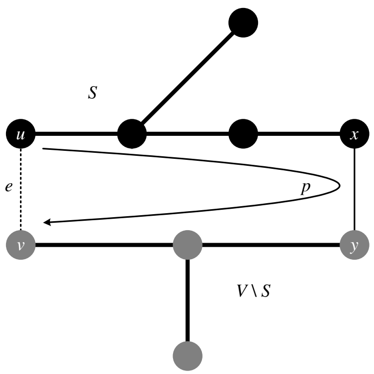
# Υπολογισμός Ακμών Επαύξησης

**Θεώρημα.** Έστω $\Delta \subseteq$ ενός ΕΕΔ και τομή $(S, V \setminus S)$ που δεν διασχίζει $\Delta$. Κάθε ακμή **ελάχιστου βάρους** $\in \delta(S, V \setminus S)$ είναι **ακμή επαύξησης** για $\Delta$.

**Απόδειξη.** $e = \{u, v\}$ ακμή ελάχιστου βάρους $\in \delta(S, V \setminus S)$.
$T$ ΕΕΔ: $\Delta \subseteq T$. Υποθέτουμε ότι $\Delta \cup \{e\} \not\subseteq T$.
Έστω $p$ μονοπάτι $u - v$ στο $T$.
$e' = \{x, y\}$ ακμή $p \in \delta(S, V \setminus S)$.
$T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{e'\}$ είναι **ΕΕΔ:**

$$w(T') = w(T) + w(e) - w(e') \le w(T)$$

γιατί $w(e) \le w(e')$.
$\Delta \subseteq T' \setminus \{e\} = T \setminus \{e\} \Rightarrow \Delta \cup \{e\} \subseteq T'$.



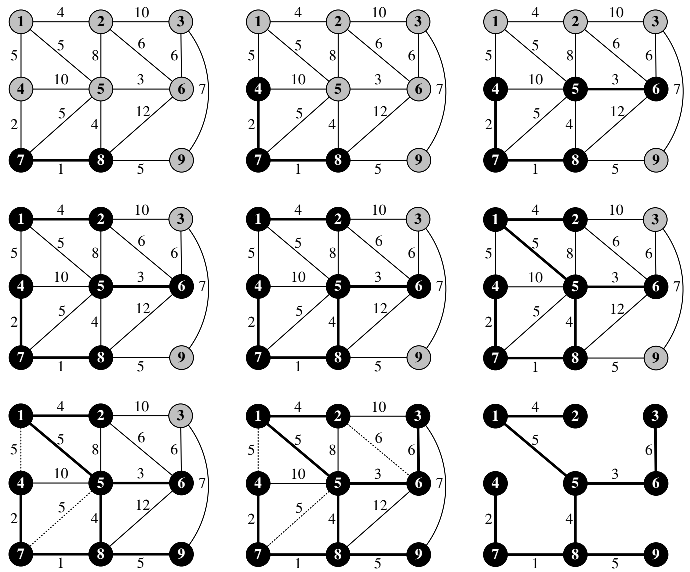



# Αλγόριθμος Kruskal

```
MST-Kruskal(G(V,E,w))
    Ταξινόμησε ακμές σε αύξουσα σειρά βάρους, w(e_1) ≤ ··· ≤ w(e_m).
    Δ ← ∅; i ← 1;
    while |Δ| < n − 1 and i ≤ m do
        if Δ ∪ {e_i} δεν έχει κύκλο then
            Δ ← Δ ∪ {e_i};
        i ← i + 1;
```

- **Υλοποίηση:** Ύπαρξη κύκλου στο $\Delta \cup \{e_i\}$ με δομή Union-Find.
  Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(m \log m)$.
- **Ορθότητα:**
  - $\Delta \cup \{e_i\}$ δάσος $\Leftrightarrow e_i$ διασχίζει τομή που δεν διασχίζει το $\Delta$.
  - Αύξουσα σειρά βάρους $\Rightarrow e_i$ ελάχιστου βάρους που διασχίζει συγκεκριμένη τομή.
  - $e_i$ ακμή επαύξησης για $\Delta$.

# Αλγόριθμος Kruskal - Παράδειγμα





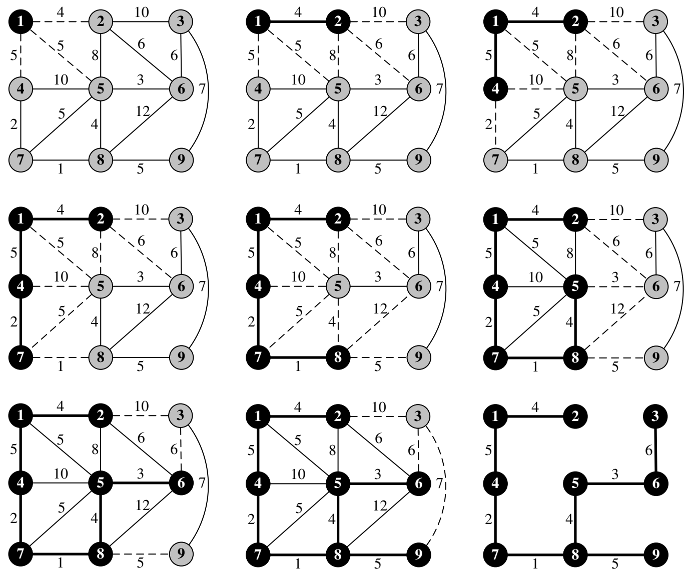
# Αλγόριθμος Prim

- **Υλοποίηση:** Ελάχιστο $c[v] \Rightarrow$ Ουρά Προτεραιότητας.
  Binary Heap: $\Theta(m \log n)$.
  Fibonacci Heap: $\Theta(m + n \log n)$.
- **Ορθότητα:**
  - Ακμή $\{v, p[v]\} \in \delta(S, V \setminus S)$ ελάχιστου βάρους.
  - $e_i$ ακμή επαύξησης για $\Delta$.

MST-Prim$(G(V,E,w), r)$
  **for all** $v \in V$ **do**
    $c[v] \leftarrow \infty$; $p[v] \leftarrow$ NIL;
  $c[r] \leftarrow 0$; $S \leftarrow \emptyset$; $\Delta \leftarrow \emptyset$;
  **while** $|S| < n$ **do**
    $v \notin S : c[v] = \min_{u \notin S}\{c[u]\}$;
    **if** $p[v] \neq$ NIL **then**
      $\Delta \leftarrow \Delta \cup \{v, p[v]\}$;
    $S \leftarrow S \cup \{v\}$;
    **for all** $u \in$ AdjList$[v]$ **do**
      **if** $u \notin S$ **and** $w(v,u) < c[u]$ **then**
        $c[u] \leftarrow w(v,u)$; $p[u] \leftarrow v$;



# Αλγόριθμος Prim - Παράδειγμα





# Ασκήσεις

- Έστω γράφημα με διαφορετικά βάρη στις ακμές.
  Ν.δ.ο. κάθε ΕΕΔ περιέχει την **ακμή ελάχιστου βάρους**.
- Έστω γράφημα με διαφορετικά βάρη στις ακμές.
  Ν.δ.ο. έχει ένα **μοναδικό ΕΕΔ**.
- Περιέχει το ΕΕΔ την **ακμή μέγιστου βάρους** κάθε γραφήματος;
- Έστω κύκλος $C$. Ν.δ.ο. κανένα ΕΕΔ δεν περιέχει την **ακμή μέγιστου βάρους** του $C$ (να υποθέσετε ότι είναι μοναδική).
- Δίνεται ένα ΕΕΔ $T$ για το γράφημα $G(V,E,w)$.
  Ν.δ.ο $T$ **είναι ΕΕΔ** και για $G(V,E,w/2)$.

# Ασκήσεις

- Υπολογισμός ΕΔ $T$ με **δεύτερο μικρότερο** συνολικό βάρος ακμών.
- Υπολογισμός ΕΕΔ $T$ με **περιορισμούς** στις ακμές.
- Έστω **bottleneck κόστος** ΕΔ $T$ είναι $b(T) = \max_{e \in T}\{w(e)\}$.
  Υπολογισμός ΕΔ $T$ με **ελάχιστο bottleneck κόστος**
  (ελάχιστο $c(T)$ από όλα τα ΕΔ).